Prépa bac : les fonctions exp et ln

Calculatrice :
Solve et nSolve

Polynésie juin 2016 ex1
Exp, théorème des bijections (deux valeurs), interprétation d'une limite, algorithme de seuil

EXERCICE 1 **7 points**

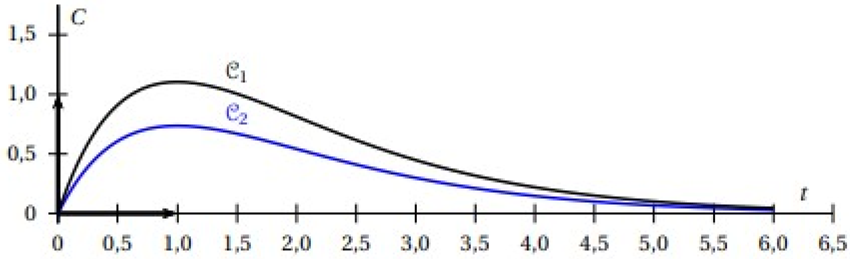
Commun à tous les candidats

Partie A

Voici deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ qui donnent pour deux personnes P_1 et P_2 de corpulences différentes la concentration C d'alcool dans le sang (taux d'alcoolémie) en fonction du temps t après ingestion de la même quantité d'alcool. L'instant $t = 0$ correspond au moment où les deux individus ingèrent l'alcool.

C est exprimée en gramme par litre et t en heure.

Définition : La corpulence est le nom scientifique correspondant au volume du corps



1. La fonction C est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et on note C' sa fonction dérivée. À un instant t positif ou nul, la vitesse d'apparition d'alcool dans le sang est donnée par $C'(t)$.
   À quel instant cette vitesse est-elle maximale ?
   On dit souvent qu'une personne de faible corpulence subit plus vite les effets de l'alcool.
2. Sur le graphique précédent, identifier la courbe correspondant à la personne la plus corpulente. Justifier le choix effectué.
3. Une personne à jeun absorbe de l'alcool. On admet que la concentration C d'alcool dans son sang peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(t) = Ate^{-t}$$

   où A est une constante positive qui dépend de la corpulence et de la quantité d'alcool absorbée.

   a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Déterminer $f'(0)$.

   b. L'affirmation suivante est-elle vraie ?
   « À quantité d'alcool absorbée égale, plus A est grand, plus la personne est corpulente. »

Partie B - Un cas particulier

Paul, étudiant de 19 ans de corpulence moyenne et jeune conducteur, boit deux verres de rhum. La concentration C d'alcool dans son sang est modélisée en fonction du temps t, exprimé en heure, par la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(t) = 2te^{-t}.$$

1. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
2. À quel instant la concentration d'alcool dans le sang de Paul est-elle maximale ? Quelle est alors sa valeur ? Arrondir à 10^{-2} près.
3. Rappeler la limite de $\dfrac{e^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$ et en déduire celle de $f(t)$ en $+\infty$.
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Paul veut savoir au bout de combien de temps il peut prendre sa voiture. On rappelle que la législation autorise une concentration maximale d'alcool dans le sang de 0,2 g.L^{-1} pour un jeune conducteur.

   a. Démontrer qu'il existe deux nombres réels t_1 et t_2 tels que
   $f(t_1) = f(t_2) = 0,2$.

b. Quelle durée minimale Paul doit-il attendre avant de pouvoir prendre le volant en toute légalité ?

Donner le résultat arrondi à la minute la plus proche.

5. La concentration minimale d'alcool détectable dans le sang est estimée à 5×10^{-3} g.L^{-1}.

a. Justifier qu'il existe un instant T à partir duquel la concentration d'alcool dans le sang n'est plus détectable.

b. On donne l'algorithme suivant où f est la fonction définie par $f(t) = 2te^{-t}$.

Initialisation :	t prend la valeur 3,5
	p prend la valeur 0,25
	C prend la valeur 0,21
Traitement :	Tant que $C > 5 \times 10^{-3}$ faire :
	t prend la valeur $t + p$
	C prend la valeur $f(t)$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher t

Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant en exécutant cet algorithme. Arrondir les valeurs à 10^{-2} près.

	Initialisation	Étape 1	Étape 2
p	0,25		
t	3,5		
C	0,21		

Que représente la valeur affichée par cet algorithme ?

Nll Calédonie fev 2018 ex 4

Exp,limite(composition), théorème des bijections, théorème ds gendarmes

Exercice 4 (6 points)
Commun à tous les candidats

Soit $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Partie A

Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x,

$$g(x) = -2x^3 + x^2 - 1.$$

1. a. Étudier les variations de la fonction g.

b. Déterminer les limites de la fonction g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée α, et que α appartient à $[-1 ; 0]$.

3. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x,

$$f(x) = \left(1 + x + x^2 + x^3\right) e^{-2x+1}.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2. a. Démontrer que, pour tout $x > 1$,

$$1 < x < x^2 < x^3.$$

b. En déduire que, pour $x > 1$,

$$0 < f(x) < 4x^3 e^{-2x+1}.$$

c. On admet que, pour tout entier naturel n, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n e^{-x} = 0$.

Vérifier que, pour tout réel x, $4x^3 e^{-2x+1} = \dfrac{e}{2}(2x)^3 e^{-2x}$ puis montrer que :

$$\lim_{x \to +\infty} 4x^3 e^{-2x+1} = 0.$$

d. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O\,;\, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

En utilisant la question précédente, déterminer la limite de f en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.

3. Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = \left(-2x^3 + x^2 - 1\right) e^{-2x+1}$.

4. À l'aide des résultats de la partie A, déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Amérique du nord juin 2017 ex2

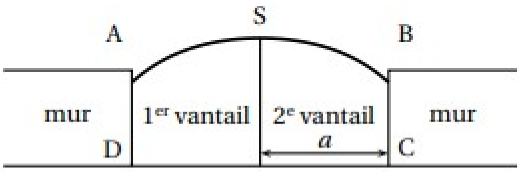
Exp, Théorème des bijections, intégrale, géométrie collège

Exercice 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Un fabricant doit réaliser un portail en bois plein sur mesure pour un particulier. L'ouverture du mur d'enceinte (non encore construit) ne peut excéder 4 mètres de large. Le portail est constitué de deux vantaux de largeur a telle que $0 < a \leqslant 2$.

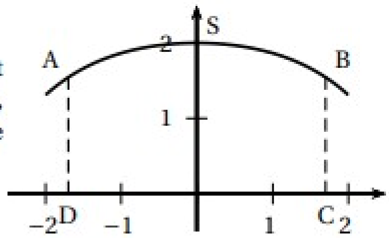
Dans le modèle choisi, le portail fermé a la forme illustrée par la figure ci-contre. Les côtés [AD] et [BC] sont perpendiculaires au seuil [CD] du portail. Entre les points A et B, le haut des vantaux a la forme d'une portion de courbe.



Cette portion de courbe est une partie de la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-2\,;\,2]$ par :

$$f(x) = -\frac{b}{8}\left(e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}}\right) + \frac{9}{4} \quad \text{où } b > 0.$$

Le repère est choisi de façon que les points A, B, C et D aient pour coordonnées respectives $(-a\,;\, f(-a))$, $(a\,;\, f(a))$, $(a\,;\,0)$ et $(-a\,;\,0)$ et on note S le sommet de la courbe de f, comme illustré ci-contre.



Partie A

1. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[-2\,;\,2]$, $f(-x) = f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de la fonction f ?
2. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[-2\,;\,2]$:

$$f'(x) = -\frac{1}{8}\left(e^{\frac{x}{b}} - e^{-\frac{x}{b}}\right).$$

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$ et en déduire les coordonnées du point S en fonction de b.

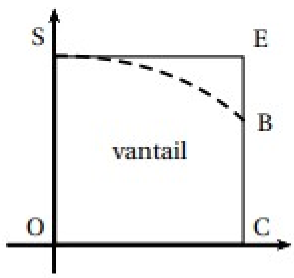
Partie B

La hauteur du mur est de 1,5 m. On souhaite que le point S soit à 2 m du sol. On cherche alors les valeurs de a et b.

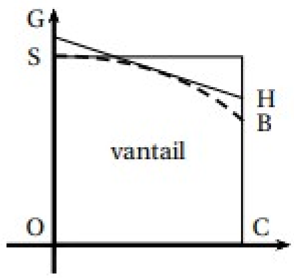
1. Justifier que $b = 1$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$ et en déduire une valeur approchée de a au centième.
3. Dans cette question, on choisit $a = 1,8$ et $b = 1$. Le client décide d'automatiser son portail si la masse d'un vantail excède 60 kg. La densité des planches de bois utilisées pour la fabrication des vantaux est égale à 20 kg.m^{-2}. Que décide le client?

Partie C

On conserve les valeurs $a = 1,8$ et $b = 1$.
Pour découper les vantaux, le fabricant prédécoupe des planches. Il a le choix entre deux formes de planches prédécoupées : soit un rectangle OCES, soit un trapèze OCHG comme dans les schémas ci-dessous. Dans la deuxième méthode, la droite (GH) est la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point F d'abscisse 1.



Forme 1 : découpe dans un rectangle



Forme 2 : découpe dans un trapèze

La forme 1 est la plus simple, mais visuellement la forme 2 semble plus économique.
Évaluer l'économie réalisée en termes de surface de bois en choisissant la forme 2 plutôt que la forme 1.

On rappelle la formule donnant l'aire d'un trapèze. En notant b et B respectivement les longueurs de la petite base et de la grande base du trapèze (côtés parallèles) et h la hauteur du trapèze :

$$\text{Aire} = \frac{b+B}{2} \times h.$$

Asie 22 juin 2017 ex1

Exp, Théorème des bijections, limite (composition)

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Un protocole de traitement d'une maladie, chez l'enfant, comporte une perfusion longue durée d'un médicament adapté. La concentration dans le sang du médicament au cours du temps est modélisée par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$C(t) = \frac{d}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a}{80}t}\right)$$

où

- C désigne la concentration du médicament dans le sang, exprimée en micromole par litre,
- t le temps écoulé depuis le début de la perfusion, exprimé en heure,
- d le débit de la perfusion, exprimé en micromole par heure,
- a un paramètre réel strictement positif, appelé clairance, exprimé en litre par heure.

Le paramètre a est spécifique à chaque patient.

En médecine, on appelle « plateau » la limite en $+\infty$ de la fonction C.

Partie A : étude d'un cas particulier

La clairance a d'un certain patient vaut 7, et on choisit un débit d égal à 84.
Dans cette partie, la fonction C est donc définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$C(t) = 12\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{7}{80}t}\right).$$

1. Étudier le sens de variation de la fonction C sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. Pour être efficace, le plateau doit être égal à 15. Le traitement de ce patient est-il efficace ?

Partie B : étude de fonctions

1. Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{105}{x}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}\right).$$

Démontrer que, pour tout réel x de $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{105g(x)}{x^2}$, où g est la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{3x}{40}\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} + \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} - 1.$$

2. On donne le tableau de variation de la fonction g :

x	0	$+\infty$
$g(x)$	0 ↘	-1

En déduire le sens de variation de la fonction f.
On ne demande pas les limites de la fonction f.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 5{,}9$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\,;\,80]$.
En déduire que cette équation admet une unique solution sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty$
Donner une valeur approchée de cette solution au dixième près.

Partie C : détermination d'un traitement adéquat

Le but de cette partie est de déterminer, pour un patient donné, la valeur du débit de la perfusion qui permette au traitement d'être efficace, c'est-à-dire au plateau d'être égal à 15.
Au préalable, il faut pouvoir déterminer la clairance a de ce patient. À cette fin, on règle provisoirement le débit d à 105, avant de calculer le débit qui rende le traitement efficace.

On rappelle que la fonction C est définie sur l' intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$C(t) = \frac{d}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a}{80}t}\right)$$

1. On cherche à déterminer la clairance a d'un patient. Le débit est provisoirement réglé à 105.
   - **a.** Exprimer en fonction de a la concentration du médicament 6 heures après le début de la perfusion.
   - **b.** Au bout de 6 heures, des analyses permettent de connaître la concentration du médicament dans le sang; elle est égale à 5,9 micromole par litre.

     Déterminer une valeur approchée, au dixième de litre par heure, de la clairance de ce patient.
2. Déterminer la valeur du débit d de la perfusion garantissant l'efficacité du traitement.

Nll Calédonie nov 2017 ex 5
Ln, limite(composition), théorème des bijections

Exercice 3 (3 points)
Commun à tous les candidats

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par

$$f(x) = 2\,\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{2x}$$

et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.
On admet que, pour tout x appartenant à $[0\,;\,\ln(2)]$, $f(x)$ est positif.
Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

Proposition A :

L'aire du domaine délimité par les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln(2)$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ est égale à 1 unité d'aire.

Partie B

Soit n un entier strictement positif.
Soit la fonction f_n définie sur l'ensemble des nombres réels par

$$f_n(x) = 2n\,\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{2x}$$

et $\mathscr{C}_n$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.
On admet que f_n est dérivable et que $\mathscr{C}_n$ admet une tangente horizontale en un unique point S_n.
Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

Proposition B :

Pour tout entier strictement positif n, l'ordonnée du point S_n est n^2.

Pondichéry avril 2016 ex 5
Ln, justification (prise d'initiative)

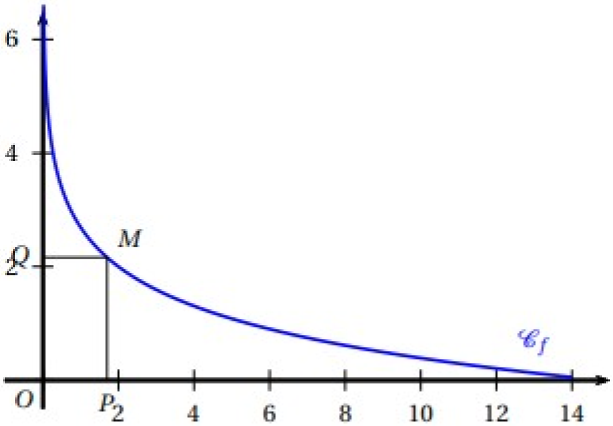
EXERCICE 4 **3 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,14]$ par

$$f(x) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée dans le repère orthogonal d'origine O ci-dessous :



À tout point M appartenant à $\mathscr{C}_f$ on associe le point P projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point Q projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

- L'aire du rectangle $OPMQ$ est-elle constante quelle que soit la position du point M sur $\mathscr{C}_f$?
- L'aire du rectangle $OPMQ$ peut-elle être maximale ?
  Si oui, préciser les coordonnées du point M correspondant.

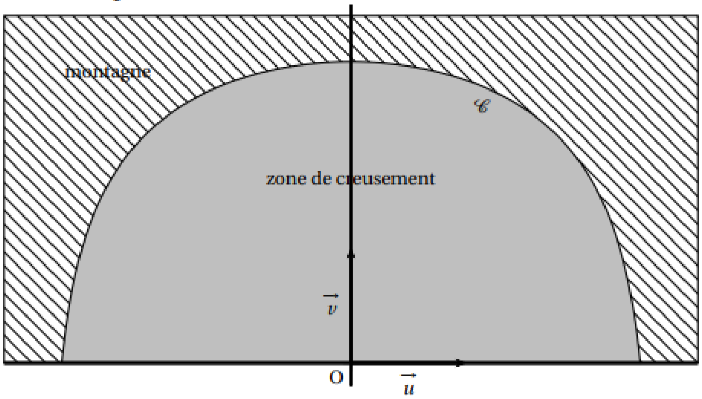
Justifier les réponses.

Pondichéry avril 2017 ex3
Ln, intégrale, algorithme (intégrale)

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Une entreprise spécialisée dans les travaux de construction a été mandatée pour percer un tunnel à flanc de montagne.
Après étude géologique, l'entreprise représente dans le plan la situation de la façon suivante : dans un repère orthonormal, d'unité 2 m, la zone de creusement est la surface délimitée par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$.



On admet que $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[-2,5\ ;\ 2,5]$ par :

$$f(x) = \ln\left(-2x^2 + 13,5\right).$$

L'objectif est de déterminer une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Calculer $f'(x)$ pour $x \in [-2,5\ ;\ 2,5]$.
2. Dresser, en justifiant, le tableau de variation de la fonction f sur $[-2,5\ ;\ 2,5]$. En déduire le signe de f sur $[-2,5\ ;\ 2,5]$.

Partie B : Aire de la zone de creusement

On admet que la courbe $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées du repère.

1. La courbe $\mathscr{C}$ est-elle un arc de cercle de centre O ? Justifier la réponse.
2. Justifier que l'aire, en mètre carré, de la zone de creusement est $\mathscr{A} = 8\displaystyle\int_0^{2,5} f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. L'algorithme, donné en annexe, permet de calculer une valeur approchée par défaut de $I = \displaystyle\int_0^{2,5} f(x)\,\mathrm{d}x$, notée a.

   On admet que : $a \leqslant I \leqslant a + \dfrac{f(0) - f(2,5)}{n} \times 2,5$.

   a. Le tableau fourni en annexe, donne différentes valeurs obtenues pour R et S lors de l'exécution de l'algorithme pour $n = 50$.

   Compléter ce tableau en calculant les six valeurs manquantes.

   b. En déduire une valeur approchée, au mètre carré près, de l'aire de la zone de creusement.

Variables
- R et S sont des réels
- n et k sont des entiers

Traitement
- S prend la valeur 0
- Demander la valeur de n
- Pour k variant de 1 à n faire
  - R prend la valeur $\dfrac{2,5}{n} \times f\left(\dfrac{2,5}{n} \times k\right)$
  - S prend la valeur $S + R$
- Fin Pour
- Afficher S

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de R et de S, arrondies à 10^{-6}, obtenues lors de l'exécution de l'algorithme pour $n = 50$.

Initialisation	$S = 0$, $n = 50$		
Boucle Pour	Étape k	R	S
	1	...	...
	2	0,130 060	0,260 176
	3	0,129 968	0,390 144
	4	0,129 837	...
	⋮		⋮
	24	0,118 137	3,025 705
	25	0,116 970	3,142 675
	⋮		⋮
	49	0,020 106	5,197 538
	50	...	...
Affichage	$S = \ldots$		

Métropole juin 2016 ex3

Ln, algorithme seuil, suites

EXERCICE 3 **5 POINTS**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right).$$

1. Résoudre dans R l'équation : $f(x) = x$.
2. Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-dessous à l'exception de la limite de la fonction f en $+\infty$ que l'on admet.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$			$+\infty$

3. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $[0\,;\,1]$, $f(x)$ appartient à $[0\,;\,1]$.
4. On considère l'algorithme suivant :

Variables	N et A des entiers naturels ;
Entrée	Saisir la valeur de A
Traitement	N prend la valeur 0 Tant que $N - \ln\left(N^2+1\right) < A$ N prend la valeur $N+1$ Fin tant que
Sortie	Afficher N

   a. Que fait cet algorithme ?

   b. Déterminer la valeur N fournie par l'algorithme lorsque la valeur saisie pour A est 100.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln\left(u_n^2+1\right)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $[0\,;\,1]$.
2. Étudier les variations de la suite (u_n).
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
4. On note ℓ sa limite, et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.
   En déduire la valeur de ℓ.

Amérique du sud nov 2017 ex1

Ln, Théorème des bijections (2 solutions), intégrale (fonction négative)

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

La chocolaterie Delmas décide de commercialiser de nouvelles

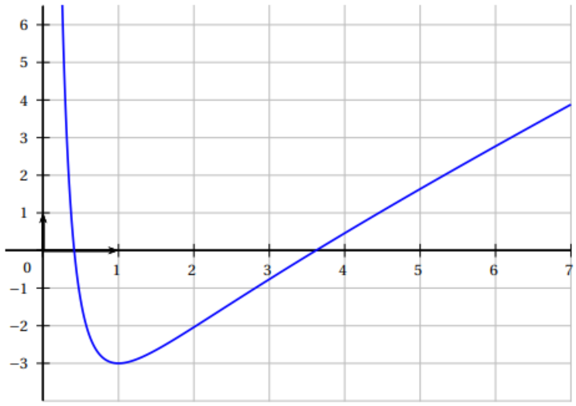
confiseries : des palets au chocolat en forme de goutte d'eau.
Pour cela, elle doit fabriquer des moules sur mesure qui doivent répondre à la contrainte suivante : pour que cette gamme de bonbons soit rentable, la chocolaterie doit pouvoir en fabriquer au moins 80 avec 1 litre de pâte liquide au chocolat.

Partie A : modélisation par une fonction

Le demi contour de la face supérieure du palet sera modélisé par une portion de la courbe de la fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x^2-2x-2-3\ln x}{x}.$$

La représentation graphique de la fonction f est donnée ci-dessous.



Le repère est orthogonal d'unité 2 cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.

1. Soit φ la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$\varphi(x)=x^2-1+3\ln x.$$

a. Calculer $\varphi(1)$ et la limite de φ en 0.

b. Étudier les variations de φ sur $]0~;~+\infty[$.
En déduire le signe de $\varphi(x)$ selon les valeurs de x.

2. **a.** Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b. Montrer que sur $]0~;~+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{\varphi(x)}{x^2}$.
En déduire le tableau de variation de f.

c. Prouver que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $]0;1]$.
Déterminer à la calculatrice une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
On admettra que l'équation $f(x)=0$ a également une unique solution β sur $[1~;~+\infty[$ avec $\beta\approx 3{,}61$ à 10^{-2} près.

d. Soit F la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par :

$$F(x)=\frac{1}{2}x^2-2x-2\ln x-\frac{3}{2}(\ln x)^2.$$

Montrer que F est une primitive de f sur $]0~;~+\infty[$.

Partie B : résolution du problème

Dans cette partie, les calculs seront effectués avec les valeurs approchées à 10^{-2} près de α et β de la partie A.

Pour obtenir la forme de la goutte, on considère la courbe représentative C de la fonction f restreinte à l'intervalle $[\alpha~;~\beta]$ ainsi que son symétrique C' par rapport à l'axe des abscisses.
Les deux courbes C et C' délimitent la face supérieure du palet. Pour des raisons esthétiques, le chocolatier aimerait que ses palets aient une épaisseur de 0,5 cm.
Dans ces conditions, la contrainte de rentabilité serait-elle respectée ?