Prépa bac : géométrie dans l'espace

Pondichéry avril 2017 ex5

Equation de plan - section

EXERCICE 5 **3 points**

Commun à tous les candidats

On considère un cube ABCDEFGH fourni en annexe.
L'espace est rapporté au repère $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

On note $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z-1=0$.
Construire, sur la figure fournie en annexe, la section du cube par le plan $\mathscr{P}$.
La construction devra être justifiée par des calculs ou des arguments géométriques.

Amérique du nord juin 2017 ex4

Théorème du toit et d'incidence, produit scalaire (cosinus), équations de droites et de plans, section

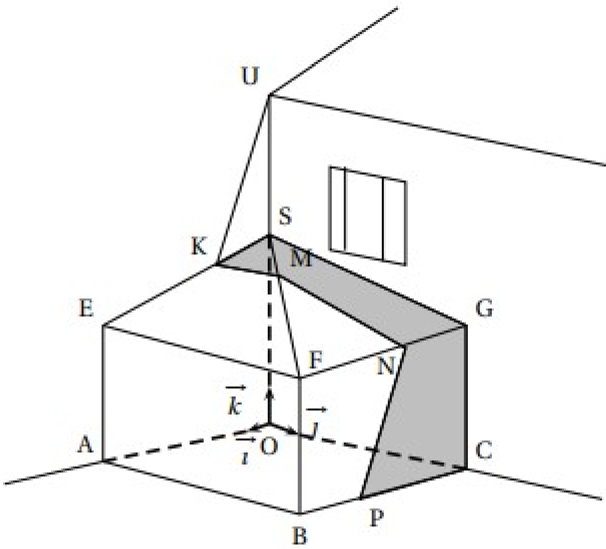
Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un particulier s'intéresse à l'ombre portée sur sa future véranda par le toit de sa maison quand le soleil est au zénith. Cette véranda est schématisée ci-dessous en perspective cavalière dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Le toit de la véranda est constitué de deux faces triangulaires SEF et SFG.

- Les plans (SOA) et (SOC) sont perpendiculaires.
- Les plans (SOC) et (EAB) sont parallèles, de même que les plans (SOA) et (GCB).
- Les arêtes [UV] et [EF] des toits sont parallèles.

Le point K appartient au segment [SE], le plan (UVK) sépare la véranda en deux zones, l'une éclairée et l'autre ombragée. Le plan (UVK) coupe la véranda selon la ligne polygonale KMNP qui est la limite ombre-soleil.



1. Sans calcul, justifier que :
   a. le segment [KM] est parallèle au segment [UV] ;
   b. le segment [NP] est parallèle au segment [UK].
2. Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Les coordonnées des différents points sont les suivantes : A(4 ; 0 ; 0), B(4 ; 5 ; 0), C(0 ; 5 ; 0), E(4 ; 0 ; 2, 5), F(4 ; 5 ; 2,5), G(0 ; 5 ; 2,5), S(0 ; 0 ; 3,5), U(0 ; 0 ; 6) et V(0 ; 8 ; 6).
   On souhaite déterminer de façon exacte la section des faces visibles de la véranda par le plan (UV K) qui sépare les zones ombragée et ensoleillée.

a. Au moment le plus ensoleillé, le point K a pour abscisse 1,2. Vérifier que les coordonnées du point K sont (1,2 ; 0 ; 3,2).

b. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (7 ; 0 ; 3) est un vecteur normal au plan (UVK) et en déduire une équation cartésienne du plan (UVK).

c. Déterminer les coordonnées du point N intersection du plan (UVK) avec la droite (FG).

d. Expliquer comment construire la ligne polygonale sur le schéma de la véranda.

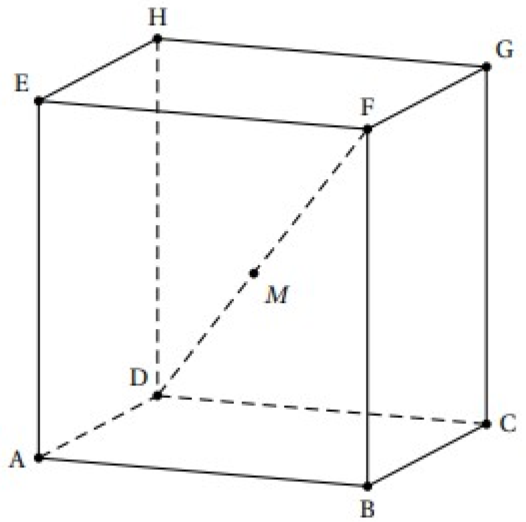
3. Afin de faciliter l'écoulement des eaux de pluie, l'angle du segment [SG] avec l'horizontale doit être supérieur à 7°. Cette condition est-elle remplie ?

Liban juin 2017 ex 1
Produit scalaire (cosinus), équations de plans et de droites, étude de fonction, optimisation

Exercice 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

On considère un cube ABCDEFGH dont la représentation graphique en perspective cavalière est donnée ci-contre.
Les arêtes sont de longueur 1.
L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(D\,;\,\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}\right)$.



Partie A

1. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (EBG).
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).
3. En déduire les coordonnées du point I intersection de la droite (DF) et du plan (EBG).
   On démontrerait de la même manière que le point J intersection de la droite (DF) et du plan (AHC) a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right)$.

Centre étrangers juin 2017 ex2
Produit scalaire, équations de droites et de plan, orthogonalité

Exercice II **4 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.
On considère deux droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques :

$$d_1 : \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2+t \\ y &=& 3-t \\ z &=& t \end{array}\right., t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x &=& -5+2t' \\ y &=& -1+t' \\ z &=& 5 \end{array}\right., t' \in \mathbb{R}.$$

On admet que les droites d_1 et d_2 sont non coplanaires.
Le but de cet exercice est de déterminer, si elle existe, une troisième droite Δ qui soit à la fois sécante avec les deux droites d_1 et d_2 et orthogonale à ces deux droites.

1. Vérifier que le point A(2; 3; 0) appartient à la droite d_1.
2. Donner un vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ de la droite d_1 et un vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$ de la droite d_2.
   Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles?
3. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{v}\,(1\,;\,-2\,;\,-3)$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$. '
4. Soit P le plan passant par le point A, et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{v}$.
   On étudie dans cette question l'intersection de la droite d_2 et du plan P.
   a. Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est : $5x+4y-z-22=0$.
   b. Montrer que la droite d_2 coupe le plan P au point B (3; 3; 5).
5. On considère maintenant la droite Δ dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$, et passant par le point B (3; 3; 5).
   a. Donner une représentation paramétrique de cette droite Δ.
   b. Les droites d_1 et Δ sont-elles sécantes? Justifier la réponse.
   c. Expliquer pourquoi la droite Δ répond au problème posé.

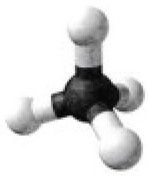
Polynésie juin 2017 ex3
Produit scalaire pour déterminer un angle (atome, problème classique)

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Les interactions électriques conduisent à modéliser la molécule de méthane CH_4 de la façon suivante :

- Les noyaux d'atomes d'hydrogène occupent les positions des quatre sommets d'un tétraèdre régulier.
- Le noyau de carbone au centre de la molécule est à égale distance des quatre atomes d'hydrogène.



L'objectif est de déterminer une mesure de l'angle entre deux liaisons carbone- hydrogène.
Un tétraèdre régulier est un polyèdre dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux.

1. Justifier qu'on peut inscrire ce tétraèdre dans un cube ABCDEFGH en positionnant deux atomes d'hydrogène sur les sommets A et C du cube et les deux autres atomes d'hydrogène sur deux autres sommets du cube.
   Représenter la molécule dans le cube donné en annexe page 6.

   Dans la suite de l'exercice, on pourra travailler dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.
2. Démontrer que l'atome de carbone est au centre Ω du cube.
3. Déterminer l'arrondi au dixième de degré de la mesure de l'angle que forment entre elles les liaisons carbone-hydrogène, c'est-à-dire l'angle $\widehat{A\Omega C}$.

Antilles Guyane sept 2017 ex 4
Problème classique, intersection d'un plan et d'une surface

Exercice 4 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.
On considère les points A(1; 1; 14), B(0 ; 1 ; 8) et C(−2 ; 2 ; 4) ainsi que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}6\\8\\-1\end{pmatrix}$.

1. **a.** Justifier que les points A, B et C définissent un plan.

b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

c. Démontrer que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $6x+8y-z=0$.

2. On considère la droite Δ des points M dont les coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ sont données par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2t-3 \\ y & = & t-\dfrac{1}{2}, \quad t\in\mathbb{R}. \\ z & = & 4t+2 \end{array}\right.$$

a. Donner un vecteur directeur de la droite Δ.

b. La droite Δ et le plan (ABC) sont-ils sécants ?

3. Dans cette question, on considère l'ensemble (E) des points M dont les coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ sont données par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t^3+t \\ y & = & t+1, \quad t\in\mathbb{R}. \\ z & = & 2t \end{array}\right.$$

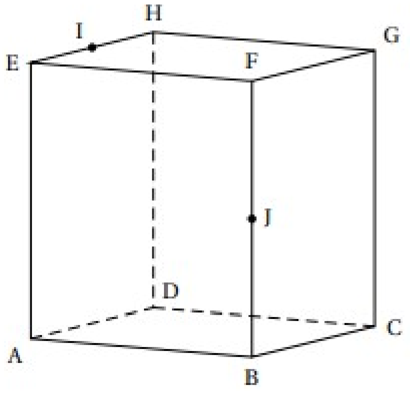
Démontrer qu'il existe un unique point M qui appartient à la fois à (E) et à (ABC).
Il n'est pas demandé de déterminer ses coordonnées.

Métropole sept 2017 ex 4

Problème classique, calcul du volume d'un tétraèdre

Exercice 4 **5 points**
Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace, on considère le cube ABCDEFGH représenté ci-contre.
On note I et J les milieux respectifs des segments [EH] et [FB].
On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.



1. Donner les coordonnées des points I et J.

2. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BGI).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).

c. On note K le milieu du segment [HJ]. Le point K appartient-il au plan (BGI) ?

3. Le but de cette question est de calculer l'aire du triangle BGI.

a. En utilisant par exemple le triangle FIG pour base, démontrer que le volume du tétraèdre FBIG est égal à $\dfrac{1}{6}$.

b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par F et orthogonale au plan (BGI).

c. La droite Δ coupe le plan (BGI) en F′. Montrer que le point F′ a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9}\,;\,\frac{4}{9}\,;\,\frac{5}{9}\right)$.

d. Calculer la longueur FF′. En déduire l'aire du triangle BGI.

Liban mai 2016 ex 1

Equation de plan - section

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

On considère un solide ADECBF constitué de deux pyramides identiques ayant pour base commune le carré ABCD de centre I. Une représentation en perspective de ce solide est donnée **en annexe (à rendre avec la copie)**. Toutes les arêtes sont de longueur 1.
L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AK}\right)$.

1. a) Montrer que $IE = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. En déduire les coordonnées des points I, E et F.

b) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}0\\-2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABE).

c) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABE).

2. On nomme M le milieu du segment [DF] et N celui du segment [AB].

a) Démontrer que les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles.

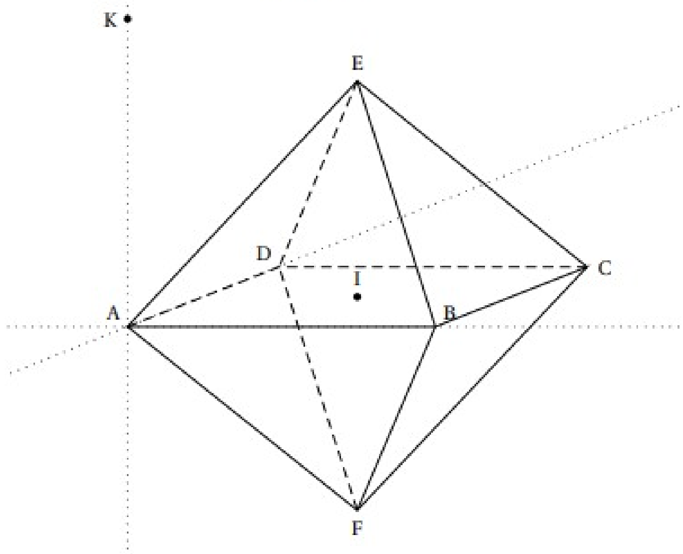
b) Déterminer l'intersection des plans (EMN) et (FDC).

c) Construire sur l'**annexe (à rendre avec la copie)** la section du solide ADECBF par le plan (EMN).

Annexe

À rendre avec la copie

Exercice 1



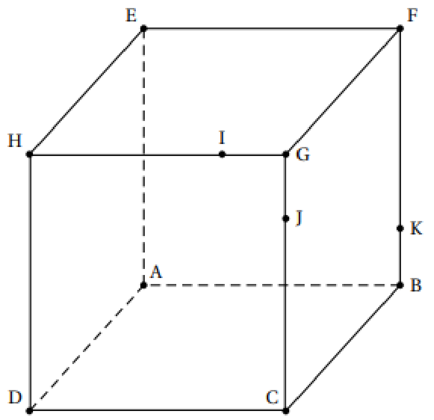
Nouvelle Calédonie nov 2016 ex4

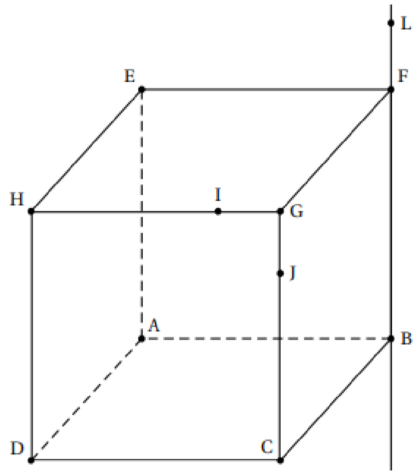
Section

EXERCICE 4 **3 points**

Commun à tous les candidats

On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous.
On définit les points I et J respectivement par $\overrightarrow{HI} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{JG} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{CG}$.





1. **Sur le document réponse donné en annexe, à rendre avec la copie**, tracer, sans justifier, la section du cube par le plan (IJK) où K est un point du segment [BF].
2. **Sur le document réponse donné en annexe, à rendre avec la copie**, tracer, sans justifier, la section du cube par le plan (IJL) où L est un point de la droite (BF).
3. Existe-t-il un point P de la droite (BF) tel que la section du cube par le plan (IJP) soit un triangle équilatéral ? Justifier votre réponse.

Amérique du Nord juin 2016 ex 4

Repère orthonormé (justification) , vecteurs coplanaires, alignement, plans perpendiculaires

Exercice 4 **5 points**
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la pyramide régulière SABCD de sommet S constituée de la base carrée ABCD et de triangles équilatéraux représentée ci-dessous.

Le point O est le centre de la base ABCD avec OB = 1.
On rappelle que le segment [SO] est la hauteur de la pyramide et que toutes les arêtes ont la même longueur.

1. Justifier que le repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{OB},\,\overrightarrow{OC},\,\overrightarrow{OS}\right)$ est orthonormé.

   Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{OB},\,\overrightarrow{OC},\,\overrightarrow{OS}\right)$.

2. On définit le point K par la relation $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$ et on note I le milieu du segment [SO].
   a. Déterminer les coordonnées du point K.
   b. En déduire que les points B, I et K sont alignés.
   c. On note L le point d'intersection de l'arête [SA] avec le plan (BCI).
   Justifier que les droites (AD) et (KL) sont parallèles.
   d. Déterminer les coordonnées du point L.

3. On considère le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ dans le repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{OB},\,\overrightarrow{OC},\,\overrightarrow{OS}\right)$
   a. Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BCI).
   b. Montrer que les vecteurs $\vec{n}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{DS}$ sont coplanaires.
   c. Quelle est la position relative des plans (BCI) et (SAD) ?