Prépa bac : Complexes

Calculatrice :

Csolve, et tous les outils sur les complexes

Antille-Guyanne juin 2017 ex 1
Equations de degré 4

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct. On considère l'équation

$$(E): \qquad z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$$

ayant pour inconnue le nombre complexe z.

1. Donner une solution entière de (E).
2. Démontrer que, pour tout nombre complexe z,

$$z^4 + 2z^3 - z - 2 = \left(z^2 + z - 2\right)\left(z^2 + z + 1\right).$$

3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.
4. Les solutions de l'équation (E) sont les affixes de quatre points A, B, C, D du plan complexe tels que ABCD est un quadrilatère non croisé.
   Le quadrilatère ABCD est-il un losange ? Justifier.

Antille-Guyanne sept 2017 ex 2
Suites,géométrie , prise d'initiative

Exercice 2 **3 points**

Commun à tous les candidats

Soit la suite de nombres complexes (z_n) définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} z_0 & = & 100 \\ z_{n+1} & = & \dfrac{\mathrm{i}}{3} z_n \quad \text{pour tout entier naturel } n. \end{array}\right.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{u},\,\overrightarrow{v}\right)$.
Pour tout entier naturel n, on note M_n le point d'affixe z_n.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points O, M_n et M_{n+2} sont alignés.
2. On rappelle qu'un disque de centre A et de rayon r, où r est un nombre réel positif, est l'ensemble des points M du plan tels que $\mathrm{A}M \leqslant r$.
   Démontrer que, à partir d'un certain rang, tous les points M_n appartiennent au disque de centre O et de rayon 1.

Nll Calédonie nov 2017 ex4
Suites,géométrie , prise d'initiative

Exercice 4 (3 points)
Commun à tous les candidats

Les questions 1. et 2. de cet exercice pourront être traitées de manière indépendante.

On considère la suite des nombres complexes (z_n) définie pour tout entier naturel n par

$$z_n = \frac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^n}.$$

On se place dans le plan complexe d'origine O.

1. Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n.
   a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{z_{n+4}}{z_n}$ est réel.
   b. Démontrer alors que, pour tout entier naturel n, les points O, A_n et A_{n+4} sont alignés.
2. Pour quelles valeurs de n le nombre z_n est-il réel?

Liban mai 2016 ex 5
Suites,géométrie , prise d'initiative

EXERCICE 5 **3 points**
Commun à tous les candidats

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} z_0 & = & 0 \\ z_{n+1} & = & \frac{1}{2}\mathrm{i} \times z_n + 5 \end{cases}$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n.
On considère le nombre complexe $z_A = 4 + 2\mathrm{i}$ et A le point du plan d'affixe z_A.

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = z_n - z_A$.
   a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\mathrm{i} \times u_n$.
   b) Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^n (-4-2\mathrm{i}).$$

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, les points A, M_n et M_{n+4} sont alignés.

Amérique Sud nov 2016 ex 2

Fonction complexe

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

On se place dans le plan complexe rapporté au repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Soit f la transformation qui à tout nombre complexe z non nul associe le nombre complexe $f(z)$ défini par :

$$f(z) = z + \frac{1}{z}.$$

On note M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $f(z)$.

1. On appelle A le point d'affixe $a = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   a. Déterminer la forme exponentielle de a.
   b. Déterminer la forme algébrique de $f(a)$.
2. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $f(z) = 1$.
3. Soit M un point d'affixe z du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.
   a. Justifier que l'affixe z peut s'écrire sous la forme $z = e^{i\theta}$ avec θ un nombre réel.
   b. Montrer que $f(z)$ est un nombre réel.
4. Décrire et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un nombre réel.

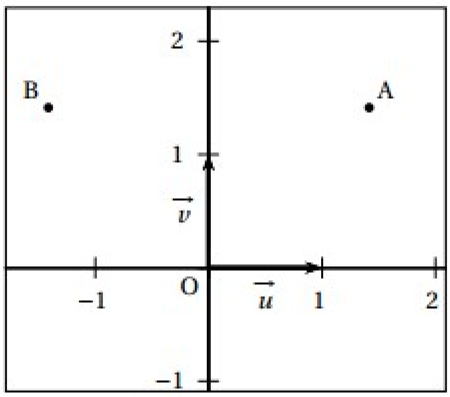
Amérique Sud nov 2017 ex 4

Géométrie, équation, prise d'initiative

EXERCICE 4 **3 points**

Commun à tous les candidats

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\,\vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_B = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$



1. Montrer que OAB est un triangle rectangle isocèle.
2. On considère l'équation

$$(E) : z^2 - \sqrt{6}z + 2 = 0.$$

Montrer qu'une des solutions de (E) est l'affixe d'un point situé sur le cercle circonscrit au triangle OAB.