LIMITES DE SUITES

Étudier la limite d'une suite (u_n), c'est examiner le comportement des termes u_n lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$.

1) LES DIFFÉRENTS CAS POSSIBLES

Soit une suite (u_n).

cas 1

Intuitivement, si « ***u_n est aussi grand que l'on veut dès que n est assez grand*** », alors on dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

De manière plus mathématique :

Tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Exemple : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$

cas 2

Intuitivement, si les termes u_n finissent par être négatifs et ***« si u_n est aussi grand que l'on veut en valeur absolue dès que n est assez grand »***, alors on dit que la suite (u_n) a pour limite $-\infty$.

On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

De manière plus mathématique :

Tout intervalle de la forme $]-\infty\,; A[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Exemple : $\lim\limits_{n \to +\infty} -n^2 = -\infty$

Remarque : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} -u_n = +\infty$

cas 3 (suite convergente)

Soit L un réel donné.

Intuitivement, dire que (u_n) a pour limite L, signifie que lorsque n est de plus en plus grand, **« les nombres u_n correspondants viennent s'accumuler autour de L ».**

On note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$

De manière plus mathématique :

Tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.

Exemple : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

Remarque :

Si une suite (u_n) a une limite finie L, alors la limite L est unique.

cas 4

Aucun des trois cas ne se produit.

Exemple :

La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ prend successivement les valeurs 1 et -1.
Ainsi (u_n) n'a pas pour limite $+\infty$, n'a pas pour limite $-\infty$ et n'a pas pour limite un réel.

Remarque : Une suite qui ne converge pas est **divergente**. (cas 1 , cas 2 , cas 4)

2) OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

Les théorèmes qui suivent, présentés sous forme de tableaux, sont admis.
Pour la plupart d'entre eux , ils sont naturels mais … comme souvent en mathématiques, il y a quelques cas particuliers.
On note par un point d'interrogation « ? » les cas où il n'y a pas de conclusion générale.
On dit qu'il s'agit de cas de formes indéterminées . Ces cas nécessiteront une étude particulière chaque fois qu'ils se présenteront.

- **Limite de la suite de terme général $k \times u_n$ (où k est un réel donné)**

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$	L	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} (k \times u_n)$ (avec $k > 0$)	kL	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} (k \times u_n)$ (avec $k < 0$)	kL	$-\infty$	$+\infty$

Exemple :
Soit la suite (w_n) définie par $w_n = 5\,n^2$

On a $w_n = 5\,u_n$ où $u_n = n^2$
Comme $5 > 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty$

- **Limite de la suite de terme général $u_n + v_n$**

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Exemple :

Soit la suite (w_n) définie pour $n\in\mathbb{N}^*$ par $w_n = 5n^2 + \frac{1}{n}$

On a $w_n = u_n + v_n$ où $u_n = 5n^2$ et $v_n = \frac{1}{n}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$

- **Limite de la suite de terme général $u_n \times v_n$**

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	$L>0$	$L>0$	$L<0$	$L<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n\times v_n)$	$L\times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Exemple :

Soit la suite (w_n) définie pour $n\in\mathbb{N}^*$ par $w_n = -n^2 \times \left(5n^2 + \frac{1}{n}\right)$

On a $w_n = u_n \times v_n$ où $u_n = -n^2$ et $v_n = 5n^2 + \frac{1}{n}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$

- **Limite de la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$**

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$L>0$ ou $+\infty$	$L>0$ ou $+\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	$L<0$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	L'	$+\infty$ ou $-\infty$	$L'>0$	$L'<0$	$L'>0$	$L'<0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Cas où $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \neq 0$ *Cas où* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

Remarques :

- « 0 en restant négative ou positive» signifie qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n>n_0$, (v_n) garde un signe constant.
- On note $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0^+$ pour indiquer que (v_n) tend vers 0 en restant positive.
- On note $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0^-$ pour indiquer que (v_n) tend vers 0 en restant négative.

Exemple :

Soit la suite (w_n) définie pour $n\in\mathbb{N}^*$ par $w_n = \dfrac{5n^2 + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$

On a $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ où $u_n = 5n^2 + \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0^+$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$

3) LIMITES ET COMPARAISON

Propriété :

Soit deux suites (u_n) et (v_n).

- Si $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
- Si $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Preuve du premier point : *exigible*

Soit $M>0$ et l'intervalle $]M\,;+\infty[$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe donc $n_0\in\mathbb{N}$ tel que, si $n>n_0$, alors $u_n\in]M\,;+\infty[$.

De plus, il existe $n_1\in\mathbb{N}$ tel que si $n>n_1$, alors $u_n < v_n$.

On note N le maximum de n_0 et n_1.
On en déduit que, si $n > N$, alors $v_n \in]M\ ;+\infty[$.
Ce résultat est vrai pour tout intervalle $]M\ ;+\infty[$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Le deuxième résultat se démontre de la même façon.

Exemple :
Soit la suite (w_n) définie par $w_n = n - \sin(n)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $-1 \leqslant -\sin(n)$, donc $n-1 \leqslant n - \sin(n)$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-1) = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-\sin(n)) = +\infty$

Propriété :

- Soit une suite (u_n) croissante telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$, alors tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs ou égaux à L.
- Soit une suite (u_n) décroissante telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$, alors tous les termes de la suite (u_n) sont supérieurs ou égaux à L.

Preuve du premier point : *exigible*
Raisonnons par l'absurde :

Supposons, qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > L$.

Considérons alors l'intervalle ouvert centré sur L : $I =]L-(u_{n_0}-L)\ ; L+(u_{n_0}-L)[=]2L - u_{n_0}\ ; u_{n_0}[$.
Comme (u_n) est croissante, pour tout $n > n_0$, $u_n \geq u_{n_0}$ et $u_n \notin I$.
On a donc trouvé un intervalle ouvert contenant L qui ne contient pas toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang n.

La supposition de départ est donc fausse et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant L$.

Théorème des gendarmes ou théorème d'encadrement : *admis*

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites vérifiant à partir d'un certain rang $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$
Si (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes de même limite L, alors la suite (w_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = L$.

4) LIMITE DE LA SUITE (q^n) où $q \in \mathbb{R}$

Propriété :

Soit $q \in \mathbb{R}$.

- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$
- Si $q = 1$, alors pour tout n, $q^n = 1$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$
- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
- Si $q \leqslant -1$, alors la suite (q^n) est divergente

Preuve du troisième point : *exigible*

- Soit $a > 0$. Montrons par récurrence que pour tout entier n, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$

Soit P(n) la proposition : « $(1+a)^n \geqslant 1+na$ »
Initialisation :
pour $n = 0$, on a : $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$ donc P(0) est vraie.

Hérédité :
Supposons que la proposition P(n) soit vraie pour un entier naturel fixé n.
On a donc : $(1+a)^n \geqslant 1+na$
Montrons que P($n+1$) est vraie , c'est-à-dire que : $(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1) \times a$

On a :
$(1+a)^{n+1} = (1+a) \times (1+a)^n$ et $(1+a)^n \geqslant 1 + na$
On en déduit que $(1+a)^{n+1} \geqslant (1+a) \times (1+na)$
Or $(1+a) \times (1+na) = 1 + na + a + na^2 = 1 + (n+1)a + na^2$
Comme $na^2 \geq 0$, on en déduit que $1 + (n+1)a + na^2 \geqslant 1 + (n+1)a \Rightarrow (1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1) \times a$

La proposition P(n+1) est alors vérifiée.

Conclusion :

On a donc démontré par récurrence que la proposition P(n) est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.
c'est-à-dire que : $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ pour tout n de $\mathbb{N}$

- Montrons que si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

On a $q > 1$, on peut donc écrire $q = 1 + a$ où $a > 0$.
Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $q^n = (1+a)^n$
On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q^n \geqslant 1 + na$
Or, comme $a > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + na) = +\infty$
On en déduit donc que $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

Exemple :

La suite (u_n) définie par $u_n = 2^n$ est une suite géométrique de raison 2 supérieur à 1 ; elle est donc divergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Remarque :

On en déduit facilement la limite d'un suite géométrique de terme général $u_0 q^n$.

Exemple :

Soit (v_n) La suite définie par $v_n = -5 \times 2^n = -5 \times u_n$ où $u_n = 2^n$.
On a vu que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$; on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

5) CONVERGENCE DE SUITES MONOTONES

Définition : *rappel*

- Une suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n , on ait $u_n \leqslant M$.
- Une suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout entier naturel n , on ait $u_n \geqslant m$.
- Une suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Comme pour les fonctions, on dit que M (respectivement m) est **un majorant** (respectivement **minorant**) de la suite.

Propriété : *admise*

- Toute suite croissante majorée est convergente.
- Toute suite décroissante minorée est convergente.

Remarques :
- La propriété permet de justifier qu'une suite est convergente, mais elle ne permet pas de donner la limite.
- Si une suite est majorée par M, sa limite, si elle existe, est nécessairement inférieure ou égale à M.
- Lorsqu'une suite définie par récurrence est convergente, la relation de récurrence permet de déterminer une relation vérifiée par la limite.

Exemple :
Soit une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = 3u_n + 5$.

Si (u_n) est convergente, alors sa limite L vérifie la relation : $L = 3L + 5 \Leftrightarrow L = -\dfrac{5}{2}$

Attention : Cette relation ne permet en aucun cas d'affirmer que cette suite est convergente.

Si $u_0 = -\dfrac{5}{2}$, la suite est convergente (c'est une suite constante) et si $u_0 \neq -\dfrac{5}{2}$ la suite n'est pas convergente.

Elle a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$.

Propriété :

- Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.
- Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.

Preuve du premier point : *exigible*
Soit (u_n) une suite croissante non majorée .
Soit A un réel strictement positif.
La suite (u_n) n'est pas majorée, il existe donc un entier n_0 tel que $u_{n_0} > A$.
Or la suite (u_n) est croissante . Ainsi pour tout $n \geqslant n_0$, on a $u_n \geqslant u_{n_0} > A$.
Ainsi pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \in]A\,;+\infty[$.
Tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ contient donc tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, et par conséquent $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

On démontre d'une façon similaire qu'une suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.

Remarque :
Une suite non majorée n'a pas nécessairement pour limite $+\infty$. Une telle suite a des termes aussi grands que l'on veut puisqu'elle n'est pas majorée, mais elle n'a pas nécessairement ses termes aussi grands que l'on veut à partir d'un certain rang.
On peut citer comme exemple la suite (u_n) définie par $u_n = ((-1)^n + 1)n$