Raisonnement par récurrence

Ex 1 : ***Vrai ou faux***

1) Si une propriété est héréditaire, alors elle est vraie pour tout entier naturel n .
2) Si une propriété est vraie pour $n=0$ et est héréditaire, alors elle est vraie pour $n=1$.
3) Si une propriété est vraie pour $n=1$ et est héréditaire, alors elle est vraie pour $n=0$.
4) Si une propriété est vraie pour $n=0$ et $n=1$, alors elle est héréditaire.
5) Si une propriété est vraie pour $n=5$ et héréditaire à partir de $n=3$, alors elle est vraie pour tout n supérieur ou égal à 3.
6) Si une propriété est vraie pour $n=5$ et héréditaire à partir de $n=3$, alors elle est vraie pour tout n supérieur ou égal à 5.
7) Si une propriété est vraie pour $n=3$ et héréditaire à partir de $n=5$, alors elle est vraie pour tout n supérieur ou égal à 3.
8) Si une propriété est vraie pour $n=3$ et héréditaire à partir de $n=5$, alors elle est vraie pour tout n supérieur ou égal à 5.

Ex 2 :

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul,

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$$

Ex 3 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle que pour tout $x\in \mathrm{I}$, on a $f(x)\in \mathrm{I}$.
(u_n) est une suite définie par $u_o\in \mathrm{I}$ et, telle que pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=f(u_n)$.
1) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n\in \mathrm{I}$.
2) On suppose que f est croissante sur I. Discuter, suivant les valeurs de u_o et u_1 , du sens de variation de la suite (u_n) .
3) Que peut-on dire du sens de variation de la suite (u_n) lorsque f est décroissante sur I ?

Comportement global d'une suite

Ex 4 : ***Vrai ou faux***

1) Une suite est toujours soit croissante, soit décroissante.
2) Une suite peut être à la fois croissante et décroissante.
3) Si (u_n) est décroissante, alors $u_0\geqslant u_1\geqslant u_2\geqslant u_3\geqslant u_4$
4) Si $u_0\geqslant u_1\geqslant u_2\geqslant u_3\geqslant u_4$, alors (u_n) est décroissante.
5) Si (u_n) est de signe constant, alors (u_n) est monotone.
6) Si pour tout entier n , $0<u_n\leqslant 4$, alors :
  a) (u_n) est minorée par 4 .
  b) (u_n) est minorée par 0,
  c) (u_n) est minorée par 1.
  d) 5 est un majorant de (u_n)
  e) (u_n) est bornée.
  f) (u_n) admet une infinité de majorants.
7) Une suite est toujours soit minorée, soit majorée.
8) Un majorant d'une suite est toujours un terme de la suite.
9) Une suite croissante est toujours minorée.
10) Une suite minorée est toujours croissante.
11) Une suite croissante n'est pas majorée.
12) Si pour tout entier naturel n , $\frac{1}{n+1}\leqslant u_n\leqslant n+1$
  a) (u_n) est minorée.
  b) (u_n) est majorée.
  c) (u_n) est monotone.
13) Soit une suite (u_n) et la fonction f telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=f(n)$.
  a) Si (u_n) est croissante, alors f est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
  b) Si f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors (u_n) est croissante.
  c) Si f est bornée sur $\mathbb{R}^+$, alors (u_n) est bornée.
  d) Si (u_n) est bornée, alors f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.
14) Une suite décroissante peut avoir une limite égale à 100.
15) On peut déterminer le signe de la dérivée d'une suite (u_n) pour déterminer les variations de (u_n) .

Ex 5 : ***Déterminer u_{n+1} en fonction de u_n***

Dans chaque cas, déterminer une formule de récurrence de la suite.
1) Chaque terme est égal au triple du terme précédent.
2) La somme de deux termes consécutifs est toujours égal à 5.
3) Chaque terme est une augmentation de 20 % du terme précédent.
4) $u_{n+1}=f(u_n)$ où $f(x)=\frac{3x+5}{4x+1}$
5) $u_n=7^{n-3}$ 6) $u_n=2n-5$
7) $u_n=1\times 2\times 3\times\ldots\times n$ 8) $u_n=\frac{1}{n+1}$
9) $u_0=8$, $u_1=10$, $u_2=13$, $u_3=17$, $u_4=22$ …
10) $u_0=1$, $u_1=5$, $u_2=21$, $u_3=85$ ...

Ex 6 : ***Étudier la monotonie***

Dans chaque cas, étudier la monotonie de la suite (u_n) .

1) $u_0=1$ et $u_{n+1}=u_n+n^2-3n+5$ 2) $u_n=n\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$
3) $u_n=1^2+2^2+\ldots+n^2$ 4) $u_0=5$ et $u_{n+1}=u_n-2n$
5) $u_n=1\times 2\times 3\times\ldots\times n$ 6) $u_n=\frac{n^2}{3^n}$
7) $u_n=n^3-12n^2+45n$ (Aide : étudier une fonction)
8) $u_n=\frac{n^2-4}{n^2+1}$ (Aide : étudier une fonction)

Ex 7 : ***Suites bornées***

Dans chacun des cas, indiquer si la suite est minorée, majorée ou bornée.

1) $u_n=4\left(\frac{2}{3}\right)^n-1$ 2) $u_n=\frac{(-1)^n}{5}+4$ 3) $u_n=\frac{n^2}{n^2+2}$
4) $u_n=3-4\sin(5n)$ 5) $u_n=\frac{3^n}{4}-1$ 6) $u_n=1-\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}$ (pour $n>1$)
7) $u_n=\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(3-\frac{4}{n}\right)$ (pour $n>1$) 8) $u_n=\frac{3+\sin n}{2-\sin n}$

Limites de suites : les différents cas possibles

Ex 8 : ***Vrai ou faux***

1) Si l'intervalle $]2,999;3,001[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang alors $\lim_{n\to+\infty} u_n=3$
2) S'il existe un intervalle ouvert L ne contenant pas une infinité de terme de la suite (u_n) , alors (u_n) ne converge pas vers L.
3) Si tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$, où $A\in\mathbb{R}$, contient au moins un terme u_n avec $n\geqslant 100$, alors (u_n) tend vers + ∞ .
4) Si tout intervalle de la forme $]-\infty;B[$, où $B\in\mathbb{R}$, contient tous les termes de la suite (u_n) pour $n\geqslant 100$, alors (u_n) tend vers $-\infty$.
5) Si (u_n) prend un nombre fini de valeurs, alors (u_n) converge.
6) Une suite peut avoir plusieurs limites.
7) Si une suite ne converge pas, alors sa limite est + ∞ ou - ∞ .

Ex 9 : ***Logique***

1) Soit la proposition (P1) : « toute suite qui tend vers $-\infty$ est majorée »

a) (P1) est-elle vraie ?

b) La réciproque de (P1) est-elle vraie ?

2) Soit la proposition (P2) : « toute suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas majorée »

a) (P2) est-elle vraie ?

b) La réciproque de (P2) est-elle vraie ?

Ex 10 : ***Suite positive à partir d'un certain rang***

Montrer que toute suite qui converge vers 0,1 est strictement positive à partir d'un certain rang.

Ex 11 : ***Suites extraites : indices pairs et impairs***

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ et les suites (a_n) et (b_n) définies sur $\mathbb{N}$ par $a_n=u_{2n}$ et $b_n=u_{2n+1}$.

1) Démontrer que si (u_n) converge vers L, alors (a_n) et (b_n) convergent aussi vers L.

2) Réciproquement, on suppose que (a_n) et (b_n) convergent vers le même réel L . Soit I un intervalle ouvert contenant L.

a) Trouver un entier n_0 tel que pour tout entier naturel $n\geqslant n_0$, $u_n\in \mathrm{I}$.

b) En déduire que (u_n) converge vers L.

Opérations sur les limites

Ex 12 : ***Utiliser les opérations sur les limites***

Étudier dans chaque cas la convergence de la suite (u_n) .

1) $u_n=-2n^2+\dfrac{4}{n}$ 2) $u_n=300-n^2\sqrt{2}$

3) $u_n=\left(2+\dfrac{3}{n}\right)\left(5-\dfrac{1}{n^3}\right)$ 4) $u_n=\dfrac{1}{(2n+1)(-n^2-9)}$

5) $u_n=\dfrac{1}{\left(3-\dfrac{4}{n}\right)^2}$ 6) $u_n=\dfrac{n+2}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}-3}$ 7) $u_n=\dfrac{2+\dfrac{3}{n}}{5-\dfrac{2}{n^2}}$

Ex 13 : ***Lever une indétermination***

Étudier dans chaque cas la convergence de la suite (u_n) .

1) $u_n=\dfrac{n^5}{5}-\dfrac{n^2}{2}-4000$ 2) $u_n=\dfrac{1}{2}n^4-2n^3+5n^2-\dfrac{1}{4}$

3) $u_n=\dfrac{n^2-3n+1}{n^2+4}$ 4) $u_n=\dfrac{9-n^2}{(3n+2)(2n+1)}$

5) $u_n=\sqrt{n}-n$ 6) $u_n=\dfrac{\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}$

Ex 14 : ***Trouver des suites***

1) Dans chacun des cas suivant trouver deux suites u et v ayant pour limite $+\infty$ telles que :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=+\infty$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=-\infty$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-v_n)=1$ d) $u-v$ n'a pas de limite.

2) Dans chacun des cas suivant trouver deux suites u et v vérifiant $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$, telles que :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_nv_n)=+\infty$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_nv_n)=0$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_nv_n)=1$ d) uv n'a pas de limite.

Ex 15 : ***Raisonnement par l'absurde***

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$. On suppose que (u_n) est convergente et (v_n) est divergente . Soit (w_n) la suite définie par $w_n=u_n+v_n$.

1) Montrer que la suite (w_n) est divergente.

2) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=(-1)^n+\dfrac{1}{n^2+1}$.

Démontrer que (u_n) est divergente.

Limites et comparaison

Ex 16 : ***Théorème de comparaison ou d'encadrement***

Étudier dans chaque cas la convergence de la suite (u_n) .

1) $u_n=\dfrac{3\sin(n)}{n^2}$ 2) $u_n=\dfrac{3+(-1)^n}{n^2+\sqrt{n}}$ 3) $u_n=3(-1)^n+n$

4) $u_n=\dfrac{2\cos(n)}{n}+\dfrac{\sin(n)}{2n}$ 5) $u_n=\dfrac{5n+(-1)^{n+1}}{2n+(-1)^n}$ 6) $u_n=-3n^3+3\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$

7) $u_n=\sqrt{9n^2+5}$ 8) $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

Ex 17 : ***Séries***

1) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k}$

a) Montrer que pour tout entier naturel $n\in\mathbb{N}^*$,

$\dfrac{n^2}{n^2+n}\leqslant u_n\leqslant\dfrac{n^2}{n^2+1}$

b) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

2) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+k}}$

a) Montrer que pour tout entier naturel $n\in\mathbb{N}^*$, $v_n\geqslant\sqrt{\dfrac{n}{2}}$

b) Déterminer la limite de la suite (v_n) .

Limite d'une suite géométrique

Ex 18 :

Étudier dans chaque cas la convergence de la suite (u_n) .

1) (u_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{4}$.

2) $u_n=1{,}00001^n$ 3) $u_n=3+\left(\dfrac{11}{12}\right)^n$ 4) $u_n=\left(-\dfrac{8}{5}\right)^n$

5) $u_n=\left(-\dfrac{1}{7}\right)^n+\left(\dfrac{11}{12}\right)^n$ 6) $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{5}{4}\right)^k$ 7) $u_n=\dfrac{(-1)^n}{3^n}$

8) $u_n=\dfrac{3^n-4^n}{4^n-1}$ 9) $u_n=\dfrac{2^{n+1}+5^{2n}}{5^{2n-3}}$

Ex 19 : ***Nombre rationnel***

1) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=3{,}777777\ldots$ (n chiffres 7) $u_1=3{,}7$, $u_2=3{,}77$ …

Montrer que la limite de (u_n) est un nombre rationnel.

2) Montrer que 2,47474747… est un nombre rationnel.

Convergence de suites monotones

Ex 20 : ***Vrai ou faux***

1) Si (u_n) converge vers L et si pour tout entier naturel n , $u_n>2$, alors $L>2$.

2) Si (u_n) est une suite positive telle que, pour tout entier naturel n , $u_n\leqslant n$, alors la suite (u_n) converge.

3) Toute suite croissante et non majorée tend vers + ∞ .

4) Toute suite croissante et minorée est convergente.

5) Toute suite qui tend vers + ∞ est croissante à partir d'un certain rang.

6) Toute suite décroissante et minorée par 0 a pour limite 0.

7) Toute suite convergente est monotone.

8) Toute suite qui converge vers 0 est soit croissante et négative, soit décroissante et positive.

Ex 21 : ***Étudier une suite monotone minorée***

(u_n) est la suite définie par $u_0=10$ et, pour tout entier naturel n ,

$u_{n+1}=\frac{2}{5}u_n+3$.

1) Montrer que la suite est minorée par 5.

2) Montrer que (u_n) est décroissante.

3) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Ex 22 : ***Étudier une suite décroissante non minorée***

(u_n) est la suite définie par $u_0=2$ et, pour tout entier naturel $n, u_{n+1}=-(u_n)^2+u_n-1$.

1) Montrer que (u_n) est décroissante.

2) Montrer que (u_n) n'est pas minorée. (raisonnement par l'absurde)

3) En déduire la limite de la suite (u_n) .

Ex 23 :

(u_n) est la suite définie par $u_0=5$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1}=\sqrt{u_n+12}$.

1) Étude de la convergence de (u_n) .

a) Montrer que , pour tout entier naturel n , $u_n\geqslant 4$.

b) Montrer que (u_n) est décroissante.

c) Que peut-on déduire des questions précédentes ?

2) Détermination de la limite de (u_n) .

a) Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1}-4\leqslant\frac{1}{8}(u_n-4)$

b) Montrer que, pour tout entier naturel n , $0\leqslant u_n-4\leqslant\frac{1}{8^n}$

c) En déduire la limite de (u_n) .

Ex 24 :

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=n!$.

1) Montrer que (u_n) est croissante.

2) Monter que (u_n) n'est pas majorée.

3) En déduire la limite de (u_n) .

EN ROUTE VERS LE BAC

Ex 25: ***Baccalauréat S Antilles-Guyane 19 juin 2014 – ex 4***

Récurrence - calculatrice - variations - limites - suite géométrique - algorithme

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n+3\times 0{,}5^n. \end{cases}$$

1. a. Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

b. D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).

2. a. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul on a

$$u_n \geqslant \frac{15}{4}\times 0{,}5^n.$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1}-u_n\leqslant 0$.

c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

3. *On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite* (u_n).
Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10\times 0{,}5^n$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite (v_n).

b. En déduire, que pour tout entier naturel n,

$$u_n = -8\times\left(\frac{1}{5}\right)^n+10\times 0{,}5^n.$$

c. Déterminer la limite de la suite (u_n)

4. Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n\leqslant 0{,}01$.

```
n ← 0
u ← 2
Tant que ...          faire    (1)
        n ← ...                (2)
        u ← ...                (3)
Fin Tantque
Afficher n
```

Ex 26 : ***Baccalauréat série S Amérique du Sud 17 novembre 2014 – ex 3***

Récurrence - suite auxiliaire - variations - limites - équation du second degré

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2+3u_n-\frac{3}{2}.$$

Partie A : Conjecture

1. Calculer les valeurs exactes, données en fractions irréductibles, de u_1 et u_2.

2. Donner une valeur approchée à 10^{-5} près des termes u_3 et u_4.

3. Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

Partie B : Validation des conjectures

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n, par : $v_n = u_n - 3$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.
3. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)$.

   b. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).
4. Pourquoi peut-on alors affirmer que la suite (v_n) converge ?
5. On note ℓ la limite de la suite (v_n).

   On admet que ℓ appartient à l'intervalle $[-1 ; 0]$ et vérifie l'égalité : $\ell = -\frac{1}{2}\ell^2$.

   Déterminer la valeur de ℓ.
6. Les conjectures faites dans la **partie A** sont-elles validées ?

Ex 27 : *Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie - 17 novembre 2014 – ex 4*

Point fixe - Représentation d'un suite - récurrence - suite bornée - variations - suite divergente - algorithme

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = 5 - \frac{4}{x+2}.$$

On admettra que f est dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
On a tracé en **annexe 1** dans un repère orthonormé la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f ainsi que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.

1. Démontrer que f est croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. On note α la solution. On donnera la valeur exacte de α puis on en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

   Sur la figure de **annexe 1**, en utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$, placer les points M_0, M_1 et M_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2.

   Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?
4. **a.** Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n,

   $$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$$

   où α est le réel défini dans la question 2.

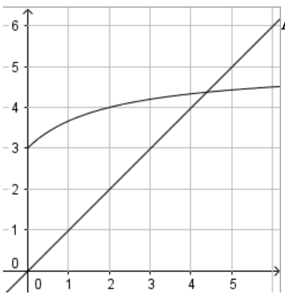
   b. Peut-on affirmer que la suite (u_n) est convergente ? On justifiera la réponse.
5. Pour tout entier naturel n, on définit la suite (S_n) par

   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

   a. Calculer S_0, S_1 et S_2. Donner une valeur approchée des résultats à 10^{-2} près.

   b. Compléter l'algorithme donné en **annexe 2** pour qu'il affiche la somme S_n pour la valeur de l'entier n demandée à l'utilisateur.

   c. Montrer que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.



Annexe 1

```
u ← 1
s ← u
i ← 0
lire n
Tant que  ...            faire

        i ← i+1

        u← ...

        s← ...

Fin Tantque
Afficher s
```

Ex 28 : *Baccalauréat S Antilles-Guyane 22 juin 2015 – ex 4*

Récurrence - suite auxiliaire - suite géométrique - limite - algorithme

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

```
Lire p
u ← 5
Pour k allant de 1 à p  faire
|
        u ← 0,5*u+0,5*(k-1)-1,5

Fin Pour
Afficher u
```

Faire fonctionner cet algorithme pour $p = 2$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.
Quel nombre obtient-on en sortie ?

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = 0,5u_n + 0,5n - 1,5.$$

1. Modifier l'algorithme de la première partie pour obtenir en sortie toutes les valeurs de u_n pour n variant de 1 à p.
2. À l'aide de l'algorithme modifié, après avoir saisi $p = 4$, on obtient les résultats suivants :

n	1	2	3	4
u_n	1	$-0,5$	$-0,75$	$-0,375$

   Peut-on affirmer, à partir de ces résultats, que la suite (u_n) est décroissante ? Justifier.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1} > u_n$.

   Que peut-on en déduire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
4. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5$.

   Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et exprimer alors v_n en fonction de n.
5. En déduire que, pour tout entier naturel n,

   $$u_n = 10 \times 0,5^n + n - 5.$$
6. Déterminer alors la limite de la suite (u_n).*

Ex 29 : *Baccalauréat S Amérique du Sud - 24 novembre 2015 – ex 4*

Récurrence - suite auxiliaire - suite géométrique - variations - limites - algorithme - tableur

Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :

- en 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins ;
- chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville ;
- chaque année, 5 % des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel n, on note :

- u_n la population en zone rurale, en l'année $2010+n$, exprimée en millions d'habitants ;
- v_n la population en ville, en l'année $2010+n$, exprimée en millions d'habitants.

On a donc $u_0 = 90$ et $v_0 = 30$.

Partie A

1. Traduire le fait que la population totale est constante par une relation liant u_n et v_n.
2. On utilise un tableur pour visualiser l'évolution des suites (u_n) et (v_n).
   Quelles formules peut-on saisir dans les cellules B3 et C3 qui, recopiées vers le bas, permettent d'obtenir la feuille de calcul ci-dessous :

	A	B	C
1	n	Population en zone rurale	Population en ville
2	0	90	30
3	1	82,5	37,5
4	2	76,125	43,875
5	3	70,706	49,294
6	4	66,100	53,900
7	5	62,185	57.815
8	6	58,857	61,143
9	7	56,029	63,971
10	8	53,625	66,375
11	9	51,581	68,419
12	10	49,844	70,156
13	11	48,367	71,633
14	12	47,112	72,888
15	13	46,045	73,955
16	14	45,138	74,862
17	15	44,368	75,632
18	16	43,713	76,287
19	17	43,156	76,844
20	18	42,682	77,318
21	19	42,280	77,720
22	20	41,938	78,062
	…	…	…
59	57	40,005	79,995
60	58	40,004	79,996
61	59	40,003	79,997
62	60	40,003	79,997
63	61	40,002	79,998

3. Quelles conjectures peut-on faire concernant l'évolution à long terme de cette population ?

Partie B

On admet dans cette partie que, pour tout entier naturel n, $\quad u_{n+1} = 0{,}85u_n + 6$.

1. **a.** Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.
   b. On admet que u_n est positif pour tout entier naturel n.
   Que peut-on en déduire quant à la suite (u_n) ?
2. On considère la suite (w_n), définie par : $w_n = u_n - 40$, pour tout $n \geqslant 0$.
   a. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique de raison 0,85.
   b. En déduire l'expression de w_n puis de u_n en fonction de n.
   c. Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.
3. Valider ou invalider les conjectures effectuées à la question **3.** de la **partie A**.
4. On considère l'algorithme suivant :

```
n ← 0
u ← 90
Tant que u ⩾ 120 -u faire

        n ← n+1

        u ← 0,85 × u+6

Fin Tantque
Afficher n
```

   a. Que fait cet algorithme ?
   b. Quelle valeur affiche-t-il ?*

Ex 30 : *Baccalauréat S Polynésie -13 juin 2014– ex 2*

Interpolation - suite auxiliaire - suite arithmétique - variations - limites - algorithme - somme

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = u_n + 2n + 2.$$

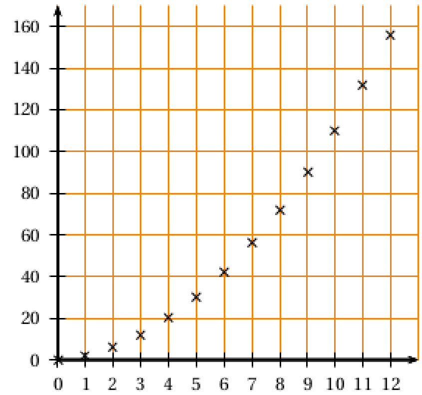
1. Calculer u_1 et u_2.
2. On considère les deux algorithmes suivants :

Algorithme 1	**Algorithme 2**
Lire n u ← 0 Pour i allant de 1 à n faire u ← u+2i+2 Fin Pour Afficher u	Lire n u ← 0 Pour i allant de 0 à n-1 faire u ← u+2i+2 Fin Pour Afficher u

   De ces deux algorithmes, lequel permet d'afficher en sortie la valeur de u_n, la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur ?

3. À l'aide de l'algorithme, on a obtenu le tableau et le nuage de points ci-dessous où n figure en abscisse et u_n en ordonnée.

n	u_n
0	0
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42
7	56
8	72
9	90
10	110
11	132
12	156



   a. Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
   Démontrer cette conjecture.
   b. La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels a, b et c tels que, pour tout entier naturel n, $u_n = an^2 + bn + c$.
   Dans le cadre de cette conjecture, trouver les valeurs de a, b et c à l'aide des informations fournies.

4. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par : $v_n = u_{n+1} - u_n$.
   a. Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
   b. On définit, pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.
   Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = (n+1)(n+2)$.
   c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = u_{n+1} - u_0$, puis exprimer u_n en fonction de n.