# LIMITES DE SUITES

Étudier la limite d'une suite $(u_n)$, c'est examiner le comportement des termes $u_n$ lorsque $n$ prend des valeurs de plus en plus grandes vers $+\infty$.

## 1 ) LES DIFFÉRENTS CAS POSSIBLES

Soit une suite $(u_n)$.

**cas 1**

Intuitivement, si « ***$u_n$ est aussi grand que l'on veut dès que $n$ est assez grand*** », alors on dit que la suite $(u_n)$ a pour limite $+\infty$.

On note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

**De manière plus mathématique :**

Tout intervalle de la forme $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs $u_n$ à partir d'un certain rang.

**Exemple :** $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

**cas 2**

Intuitivement, si les termes $u_n$ finissent par être négatifs et ***« si $u_n$ est aussi grand que l'on veut en valeur absolue dès que $n$ est assez grand »***, alors on dit que la suite $(u_n)$ a pour limite $-\infty$.

On note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

**De manière plus mathématique :**

Tout intervalle de la forme $]-\infty\,; A[$ contient toutes les valeurs $u_n$ à partir d'un certain rang.

**Exemple :** $\lim\limits_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty$

**Remarque :** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} -u_n = +\infty$

**cas 3** (suite convergente)

Soit $L$ un réel donné.

Intuitivement, dire que $(u_n)$ a pour limite $L$, signifie que lorsque $n$ est de plus en plus grand, **« les nombres $u_n$ correspondants viennent s'accumuler autour de $L$ »**.

On note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$

**De manière plus mathématique :**

Tout intervalle ouvert contenant $L$ contient toutes les valeurs $u_n$ à partir d'un certain rang.

**Exemple :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

**Remarque :**

Si une suite $(u_n)$ a une limite finie $L$, alors la limite $L$ est unique.

**cas 4**

Aucun des trois cas ne se produit.

**Exemple :**

La suite $(u_n)$ définie par $u_n = (-1)^n$ prend successivement les valeurs 1 et -1.
Ainsi $(u_n)$ n'a pas pour limite $+\infty$, n'a pas pour limite $-\infty$ et n'a pas pour limite un réel.

**Remarque :** Une suite qui ne converge pas est **divergente**. (cas 1 , cas 2 , cas 4)

## 2 ) OPÉRATIONS SUR LES LIMITES

Les théorèmes qui suivent, présentés sous forme de tableaux, sont admis.
Pour la plupart d'entre eux , ils sont naturels mais … comme souvent en mathématiques, il y a quelques cas particuliers.
On note par un point d'interrogation « ? » les cas où il n'y a pas de conclusion générale.
On dit qu'il s'agit de cas de formes indéterminées . Ces cas nécessiteront une étude particulière chaque fois qu'ils se présenteront.

- **Limite de la suite de terme général $k \times u_n$ (où $k$ est un réel donné)**

| $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ | $L$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n\to+\infty} (k\times u_n)$ ( avec $k>0$ ) | $kL$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{n\to+\infty} (k\times u_n)$ ( avec $k<0$ ) | $kL$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

**Exemple :**
Soit la suite $(w_n)$ définie par $w_n = 5\,n^2$

On a $w_n = 5\,u_n$ où $u_n = n^2$
Comme $5>0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$

- **Limite de la suite de terme général $u_n + v_n$**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ | $L$ | $L$ | $L$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ | $L'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n + v_n)$ | $L + L'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | ? |

**Exemple :**

Soit la suite $(w_n)$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $w_n = 5n^2 + \frac{1}{n}$

On a $w_n = u_n + v_n$ où $u_n = 5n^2$ et $v_n = \frac{1}{n}$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty$

- **Limite de la suite de terme général $u_n \times v_n$**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ | $L$ | $L > 0$ | $L > 0$ | $L < 0$ | $L < 0$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ |
| $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ | $L'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ ou $-\infty$ |
| $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n \times v_n)$ | $L \times L'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | ? |

**Exemple :**

Soit la suite $(w_n)$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $w_n = -n^2 \times \left(5n^2 + \frac{1}{n}\right)$

On a $w_n = u_n \times v_n$ où $u_n = -n^2$ et $v_n = 5n^2 + \frac{1}{n}$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = -\infty$

- **Limite de la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$**

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ | $L$ | $L$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $L > 0$ ou $+\infty$ | $L > 0$ ou $+\infty$ | $L < 0$ ou $-\infty$ | $L < 0$ ou $-\infty$ | $0$ |
| $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ | $L'$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | $L' > 0$ | $L' < 0$ | $L' > 0$ | $L' < 0$ | $+\infty$ ou $-\infty$ | 0 en restant positive | 0 en restant négative | 0 en restant positive | 0 en restant négative | $0$ |
| $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n}$ | $\frac{L}{L'}$ | $0$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | ? | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | ? |

*Cas où* $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n \neq 0$ — *Cas où* $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$

**Remarques :**

- « 0 en restant négative ou positive» signifie qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n > n_0$, $(v_n)$ garde un signe constant.
- On note $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0^+$ pour indiquer que $(v_n)$ tend vers 0 en restant positive.
- On note $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0^-$ pour indiquer que $(v_n)$ tend vers 0 en restant négative.

**Exemple :**

Soit la suite $(w_n)$ définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $w_n = \dfrac{5n^2 + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$

On a $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ où $u_n = 5n^2 + \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n}$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0^+$, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty$

## 3 ) LIMITES ET COMPARAISON

**Propriété :**

Soit deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$.

- Si $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$
- Si $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang et si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

**Preuve du premier point :** *exigible*

Soit $M > 0$ et l'intervalle $]M\,;+\infty[$.
On a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, si $n > n_0$, alors $u_n \in ]M\,;+\infty[$.
De plus, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n > n_1$, alors $u_n < v_n$.

On note $N$ le maximum de $n_0$ et $n_1$.
On en déduit que, si $n > N$, alors $v_n \in ]M ; +\infty[$.
Ce résultat est vrai pour tout intervalle $]M ; +\infty[$. Donc $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Le deuxième résultat se démontre de la même façon.

**Exemple :**
Soit la suite $(w_n)$ définie par $w_n = n - \sin(n)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $-1 \leqslant -\sin(n)$, donc $n - 1 \leqslant n - \sin(n)$
Comme $\lim_{n \to +\infty} (n-1) = +\infty$, on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} (n - \sin(n)) = +\infty$

**Propriété :**

- Soit une suite $(u_n)$ croissante telle que $\lim_{n \to +\infty} u_n = L$, alors tous les termes de la suite $(u_n)$ sont inférieurs ou égaux à $L$.
- Soit une suite $(u_n)$ décroissante telle que $\lim_{n \to +\infty} u_n = L$, alors tous les termes de la suite $(u_n)$ sont supérieurs ou égaux à $L$.

**Preuve du premier point :** *exigible*
Raisonnons par l'absurde :

Supposons, qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > L$.

Considérons alors l'intervalle ouvert centré sur $L$ : $I = ]L - (u_{n_0} - L) ; L + (u_{n_0} - L)[ = ]2L - u_{n_0} ; u_{n_0}[$.
Comme $(u_n)$ est croissante, pour tout $n > n_0$, $u_n \geq u_{n_0}$ et $u_n \notin I$.
On a donc trouvé un intervalle ouvert contenant $L$ qui ne contient pas toutes les valeurs $u_n$ à partir d'un certain rang $n$.

La supposition de départ est donc fausse et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant L$.

**Théorème des gendarmes ou théorème d'encadrement :** *admis*

Soit $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ trois suites vérifiant à partir d'un certain rang $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$
Si $(u_n)$ et $(v_n)$ sont deux suites convergentes de même limite $L$, alors la suite $(w_n)$ est convergente et $\lim_{n \to +\infty} w_n = L$.

## 4 ) LIMITE DE LA SUITE $(q^n)$ où $q \in \mathbb{R}$

**Propriété :**

Soit $q \in \mathbb{R}$.

- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$
- Si $q = 1$, alors pour tout $n$, $q^n = 1$ et donc $\lim_{n \to +\infty} q^n = 1$
- Si $q > 1$, alors $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- Si $q \leqslant -1$, alors la suite $(q^n)$ est divergente

**Preuve du troisième point :** *exigible*

- Soit $a > 0$. Montrons par récurrence que pour tout entier $n$, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$

Soit P($n$) la proposition : « $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ »
***Initialisation :***
pour $n = 0$, on a : $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$ donc P(0) est vraie.

***Hérédité :***
Supposons que la proposition P($n$) soit vraie pour un entier naturel fixé $n$.
On a donc : $(1+a)^n \geqslant 1 + na$
Montrons que P($n+1$) est vraie , c'est-à-dire que : $(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1) \times a$

On a :
$(1+a)^{n+1} = (1+a) \times (1+a)^n$ et $(1+a)^n \geqslant 1 + na$
On en déduit que $(1+a)^{n+1} \geqslant (1+a) \times (1+na)$
Or $(1+a) \times (1+na) = 1 + na + a + na^2 = 1 + (n+1)a + na^2$
Comme $na^2 \geq 0$, on en déduit que $1 + (n+1)a + na^2 \geqslant 1 + (n+1)a \Rightarrow (1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1) \times a$

La proposition P($n+1$) est alors vérifiée.

***Conclusion :***

On a donc démontré par récurrence que la proposition P($n$) est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.
c'est-à-dire que : $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}$

- Montrons que si $q > 1$ , alors $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

On a $q > 1$, on peut donc écrire $q = 1 + a$ où $a > 0$.
Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $q^n = (1+a)^n$
On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q^n \geqslant 1 + na$
Or, comme $a > 0$, $\lim_{n \to +\infty} (1 + na) = +\infty$
On en déduit donc que $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

**Exemple :**

La suite $(u_n)$ définie par $u_n = 2^n$ est une suite géométrique de raison 2 supérieur à 1 ; elle est donc divergente et $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ .

**Remarque :**

On en déduit facilement la limite d'un suite géométrique de terme général $u_0 q^n$.

**Exemple :**

Soit $(v_n)$ La suite définie par $v_n = -5 \times 2^n = -5 \times u_n$ où $u_n = 2^n$.
On a vu que $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ; on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

## 5 ) CONVERGENCE DE SUITES MONOTONES

**Définition :** *rappel*

- Une suite $(u_n)$ est **majorée** s'il existe un réel $M$ tel que pour tout entier naturel $n$ , on ait $u_n \leqslant M$.
- Une suite $(u_n)$ est **minorée** s'il existe un réel $m$ tel que pour tout entier naturel $n$ , on ait $u_n \geqslant m$.
- Une suite $(u_n)$ est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Comme pour les fonctions, on dit que $M$ (respectivement $m$) est **un majorant** (respectivement **minorant**) de la suite.

**Propriété :** *admise*

- Toute suite croissante majorée est convergente.
- Toute suite décroissante minorée est convergente.

**Remarques :**
- La propriété permet de justifier qu'une suite est convergente, mais elle ne permet pas de donner la limite.
- Si une suite est majorée par $M$, sa limite, si elle existe, est nécessairement inférieure ou égale à $M$.
- Lorsqu'une suite définie par récurrence est convergente, la relation de récurrence permet de déterminer une relation vérifiée par la limite.

**Exemple :**
Soit une suite $(u_n)$ vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = 3u_n + 5$ .

Si $(u_n)$ est convergente, alors sa limite $L$ vérifie la relation : $L = 3L + 5 \Leftrightarrow L = -\frac{5}{2}$

**Attention :** Cette relation ne permet en aucun cas d'affirmer que cette suite est convergente.

Si $u_0 = -\frac{5}{2}$ , la suite est convergente (c'est une suite constante) et si $u_0 \neq -\frac{5}{2}$ la suite n'est pas convergente.

Elle a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$.

**Propriété :**

- Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.
- Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.

**Preuve du premier point :** *exigible*
Soit $(u_n)$ une suite croissante non majorée .
Soit $A$ un réel strictement positif.
La suite $(u_n)$ n'est pas majorée, il existe donc un entier $n_0$ tel que $u_{n_0} > A$.
Or la suite $(u_n)$ est croissante . Ainsi pour tout $n \geqslant n_0$ , on a $u_n \geqslant u_{n_0} > A$.
Ainsi pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \in ]A ; +\infty[$ .
Tout intervalle de la forme $]A ; +\infty[$contient donc tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, et par conséquent $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

On démontre d'une façon similaire qu'une suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.

**Remarque :**
Une suite non majorée n'a pas nécessairement pour limite $+\infty$ . Une telle suite a des termes aussi grands que l'on veut puisqu'elle n'est pas majorée, mais elle n'a pas nécessairement ses termes aussi grands que l'on veut à partir d'un certain rang.
On peut citer comme exemple la suite $(u_n)$ définie par $u_n = ((-1)^n + 1)n$