Fonctions paires, impaires et périodiques

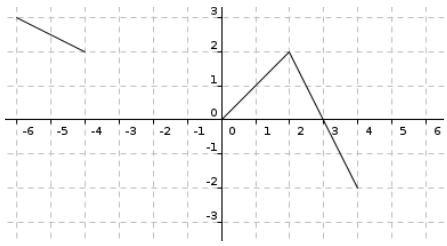
Ex 1 : ***Symétrie***

En utilisant une symétrie éventuelle de la représentation graphique, indiquer si la fonction proposée est paire, impaire ou ni l'un, ni l'autre.

$f(x)=\sin x$		$f(x)=\lvert x\rvert$	
$f(x)=\cos x$		$f(x)=x^2$	
$f(x)=e^x$		$f(x)=x^3$	
$f(x)=\ln(x)$		$f(x)=\dfrac{1}{x}$	
$f(x)=-3x$		$f(x)=\dfrac{x-2}{x-3}$	

Ex 2 :

La courbe C_f représentant la fonction f définie sur $[-6\,;6]$ est partiellement représentée ci-contre.
Sachant que f est impaire, compléter le tracé de C_f .
Donner le tableau de variation de f .



Ex 3 :

Dans chacun des cas indiquer si la fonction proposée est paire, impaire ou ni l'un, ni l'autre.

a) $f(x)=\dfrac{(1-x^2)^2}{1+x^2}$ b) $f(x)=x(x-2)$

c) $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$ d) $f(x)=\dfrac{x}{1+\lvert x\rvert}$

Ex 4 :

Dans chacun des cas indiquer si la fonction proposée est paire, impaire ou ni l'un, ni l'autre . Vérifier si la fonction est périodique de période T.

a) $f(x)=\dfrac{2}{4-\cos(x)}$ et $T=2\pi$

b) $f(x)=2-3\sin(x)$ et $T=\pi$

c) $f(x)=2\sin(x)+3x$ et $T=2\pi$

d) $f(x)=\cos^2 x\sin^2 x$ et $T=\dfrac{\pi}{2}$

Quelques rappels de trigonométrie

Ex 5 : ***Valeurs remarquables***

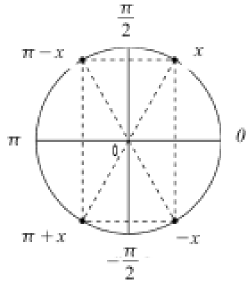
Compléter le tableau ci-dessous :

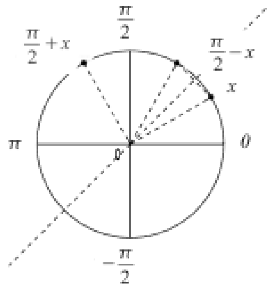
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$					
$\cos x$					

Ex 6 : ***formules à connaître et surtout à retrouver***

1) Compléter . Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\cos^2(x)+\sin^2(x)=$

2) En utilisant ces graphiques, compléter :





$\cos(-x)=$ $\sin(-x)=$ $\cos(\pi-x)=$
$\sin(\pi-x)=$ $\cos(\pi+x)=$ $\sin(\pi+x)=$
$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=$ $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=$
$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=$ $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=$

Ex 7 : ***Formules à connaître et surtout à retrouver***

Associer les formules correspondantes :

Formules d'addition

$\cos(a+b)$		$\cos a\cos b-\sin a\sin b$
$\sin(a+b)$		$\sin a\cos b-\sin b\cos a$
$\cos(a-b)$		$\cos a\cos b+\sin a\sin b$
$\sin(a-b)$		$\sin a\cos b+\sin b\cos a$

Retrouver alors **les formules de duplication :**

$\sin(2a)=$
$\cos(2a)=$ $=$ $=$

et **les formules de linéarisation :**

$\cos^2(a)=$ $\sin^2(a)=$

Ex 8 : ***Équations***

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous :
1) $\cos(2x)=\cos(3x-1)$ 2) $\sin(3x)=\sin(x+2)$
Vérifier graphiquement avec la calculatrice.

Dérivées

Ex 9 :

Dans chacun des cas déterminer la dérivée de la fonction donnée.

1) $f(x)=3\cos x-5\sin x+x$

2) $f(x)=3x\cos x$

3) $f(x)=\sin x\cos x+\sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right)$

4) $f(t)=\cos^2 t$

5) $f(t)=\dfrac{2}{\sin t}$

6) $f(p)=2p\cos p-\cos 3$

7) $f(r)=\dfrac{2\cos r-4}{\sin r}$

8) $f(t)=(3\cos t-2)^3$

Ex 10 : ***Nombres dérivés et limites***

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}\quad\text{et}\quad\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{3t}$$

Primitives

Ex 11 :

Dans chacun des cas déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction donnée.

1) $f(x)=3\cos x-5\sin x+x$

2) $f(x)=\sin x\cos x$

3) $f(x)=12\cos^2 x\sin x$

4) $f(x)=\sin x-\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$

5) $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x-3}$

6) $f(x)=\frac{2\cos x}{(\sin x+3)^2}$

Ex 12 : ***Avec un logiciel de calcul formel***

Xcas fournit le résultat suivant :
Justifier ce résultat.

```
1 integrate(cos(x)^3,x)
```

$$-\frac{\sin(x)^3}{3}+\sin(x)$$

Remarque : Dans ce cas, on peut se passer de linéariser (formules d'Euler, ex 47 complexes) . Ce qui serait bien différent pour une puissance supérieure ou égale à 4 !

Ex 13 : ***Avec des fonctions auxiliaires***

1) Déterminer les dérivées des fonctions g et h définies par $g(x)=x^2\sin x$ et $h(x)=-2x\cos x$

2) Déterminer la dérivée de la fonction $u=g-h$

3) En déduire les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x)=x^2\cos x$

Utiliser les variations des fonctions cos et sin

Ex 14 : ***Variations de fonctions sans calculer la dérivée***

1) Déterminer les variations de la fonction f définie par $f(x)=5-2\sin x$ sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

2) Déterminer les variations de la fonction g définie par $g(x)=2\cos(x)-1$ sur $[-\pi;\pi]$.

Ex 15 : ***Encadrements***

1) Dans chacun des cas, encadrer $\cos a$:

a) $\frac{\pi}{3}\leqslant a\leqslant\frac{5\pi}{6}$ b) $-\frac{3\pi}{4}\leqslant a\leqslant 0$

2) Dans chacun des cas, encadrer $\sin a$:

a) $-\frac{\pi}{2}\leqslant a\leqslant\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{3\pi}{4}\leqslant a\leqslant\frac{5\pi}{4}$

Ex 16 : ***Variations de fonctions en calculant la dérivée***

Dans chacun des cas, déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle I donné.

1) $f(x)=2\cos x+5x-5$ sur $\mathrm{I}=\mathbb{R}$

2) $f(x)=2-4x+4\sin x$ sur $\mathrm{I}=[0,\pi]$

3) $f(x)=\sin x\cos x$ sur $\mathrm{I}=\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$

Ex 17 : ***Théorèmes de comparaison …***

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x-3\cos x+1$

1) Montrer que pour tout réel x , $x-2\leqslant f(x)\leqslant x+4$

2) Résoudre les équations $f(x)=x-2$ et $f(x)=x+4$

3) Interpréter graphiquement les résultats des questions 1) et 2).

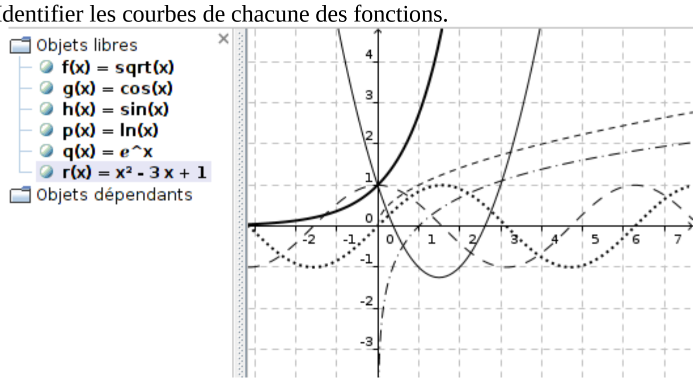
4) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

5) La fonction f est-elle bornée ?

6) Étudier les variations de la fonction f sur $[-\pi;\pi]$. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

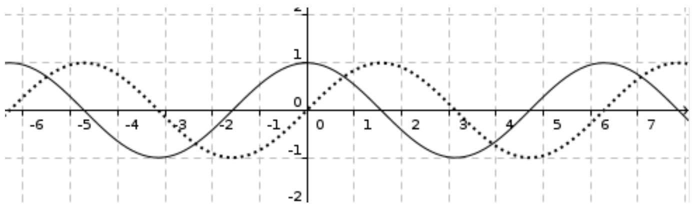
Connaître les courbes des fonctions cos et sin

Ex 18 :
Identifier les courbes de chacune des fonctions.



Ex 19 : ***Résolutions graphiques d'équations***

Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
a) $\cos x=1$ b) $\sin x=1$ c) $\cos x=0$
d) $\sin x=0$ e) $\cos x=\sin x$ f) $\sin x=x$



Ex 20 : ***La courbe de la fonction sin et la droite d'équation y=x***

Soit C la courbe de la fonction sinus et T la tangente à C au point d'abscisse 0.

1) Déterminer une équation de T.

2) Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin x-x$

3) Calculer $f(0)$ et en déduire la position de T par rapport à C .

Autres fonctions trigonométriques

Ex 21 :

1) Encadrer $f(x)=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$, et résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$.

2) Dans chaque cas, montrer que f est de signe constant :

a) $f(x)=\cos(3x)+2$ b) $f(x)=5-3\sin\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)$

Ex 22 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{3}{4}\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$.

1) Étudier la parité de f .

2) Démontrer que f est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x)=0$.

4) Établir le tableau de variation de f sur $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$

Ex 23 : ***La fonction tangente***

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f
2) f est-elle paire ? Impaire ? Ni l'un ni l'autre ?
3) Démontrer que f est périodique de période π .
4) Représenter graphiquement f sur la calculatrice.

Divers

Ex 24 : ***Limites et théorèmes de comparaison***

1) Conjecturer les limites suivantes à partir de l'outil de votre choix.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3\sin x+4x-5)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sin x}{x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\cos x}{9-x^2}$

2) Justifier les limites précédentes.

Ex 25 : ***Avec une suite***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=x-\dfrac{\pi}{5}\cos(2\pi x)$ et (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=f(n)$.

1) Prouver que la suite (u_n) est croissante.
2) La fonction f est-elle croissante sur $\mathbb{R}^+$?

EN ROUTE VERS LE BAC

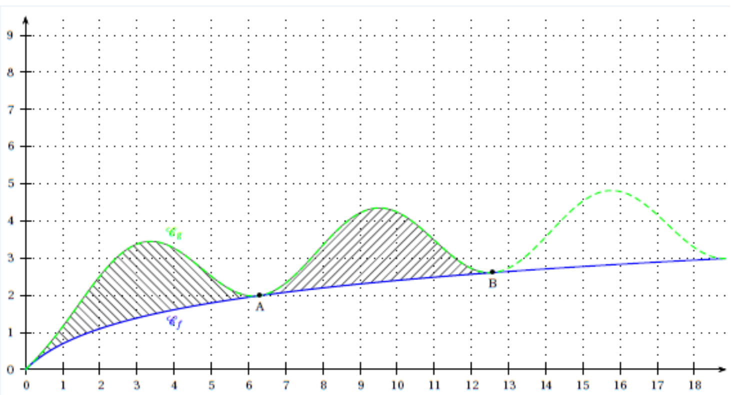
Ex 26 : ***Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie – mars 2016 – ex 2***

Intégrale - calcul d'aire

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\,;16]$ par

$$f(x)=\ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x)=\ln(x+1)+1-\cos(x).$$

Dans un repère du plan $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g.



Comparer les aires des deux surfaces hachurées sur ce graphique. *

Ex 27 : ***Baccalauréat S – Polynésie 9 septembre 2015 – ex 1***

Complexes - étude de fonction - exp - intégrale - calcul d'aire

Partie A

On rappelle que la partie réelle d'un nombre complexe z est notée $\Re(z)$.

1. Déterminer l'écriture exponentielle du nombre complexe $u=1-\mathrm{i}$.
2. Déterminer, pour tout réel θ, la forme algébrique et l'écriture exponentielle du nombre complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1-\mathrm{i})$.
3. Déduire des questions précédentes que, pour tout réel θ, $\cos(\theta)+\sin(\theta)=\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$.

Partie B

Dans cette partie, on admet que, pour tout réel θ, $\cos(\theta)+\sin(\theta)=\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$.

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\mathrm{e}^{-x}\cos(x) \quad \text{et} \quad g(x)=\mathrm{e}^{-x}.$$

On définit la fonction h sur $[0\,;+\infty[$ par $h(x)=g(x)-f(x)$.
Les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ des fonctions f, g et h sont données, en annexe, dans un repère orthogonal.

1. Conjecturer :
   a. les limites des fonctions f et g en $+\infty$;
   b. la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{C}_g$;
   c. la valeur de l'abscisse x pour laquelle l'écart entre les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ est maximal.
2. Justifier que $\mathscr{C}_g$ est située au-dessus de $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
3. Démontrer que la droite d'équation $y=0$ est asymptote horizontale aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
4. a. On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
   Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0\,;+\infty[$,
   $h'(x)=\mathrm{e}^{-x}\left[\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1\right]$.
   b. Justifier que, sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1\geqslant 0$ et que, sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\,;2\pi\right]$, $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-1\leqslant 0$.
   c. En déduire le tableau de variation de la fonction h sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$.
5. On admet que, sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, la fonction H définie par
$$H(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}[-2+\cos(x)-\sin(x)]$$
   est une primitive de la fonction h.
   On note $\mathscr{D}$ le domaine du plan délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, et les droites d'équations $x=0$ et $x=2\pi$.
   Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$, exprimée en unités d'aire.*

Ex 28 : ***Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie – 19 novembre 2015 – ex 1 C***

Intégrale - calcul d'aire

Le service commercial a adopté pour les étiquettes des bouteilles la forme représentée ci-dessous dans un repère orthonormé du plan.
La forme de ces étiquettes est délimitée par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y=a\cos x$ avec $x\in\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et a un réel strictement positif.

Un disque situé à l'intérieur est destiné à recevoir les informations données aux acheteurs. On considère le disque de centre le point A de coordonnées $\left(0\,;\frac{a}{2}\right)$ et de rayon $\frac{a}{2}$. On admettra que ce disque se trouve entièrement en dessous de la courbe $\mathscr{C}$ pour des valeurs de a inférieures à 1,4.

1. Justifier que l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, les droites d'équation $x=-\frac{\pi}{2}$ et $x=\frac{\pi}{2}$, et la courbe $\mathscr{C}$ est égale à $2a$ unités d'aire.
2. Pour des raisons esthétiques, on souhaite que l'aire du disque soit égale à l'aire de la surface grisée. Quelle valeur faut-il donner au réel a pour respecter cette contrainte ?*