LES FONCTIONS SINUS ET COSINUS

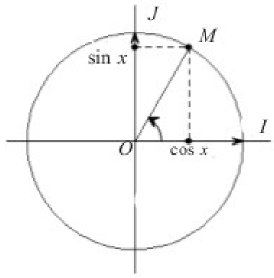
1) RAPPEL

Sauf contre indication, l'unité utilisée est le radian.
Le plan orienté est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$. On considère le cercle trigonométrique C de centre O.

Définition :

Pour tout réel x, il existe un point M unique du cercle trigonométrique C tel que x soit une mesure de $(\overrightarrow{OI}\,,\overrightarrow{OM})$.

- L'abscisse du point M est le **cosinus** de x (noté $\cos x$)
- L'ordonnée du point M est le **sinus** de x (noté $\sin x$)



On peut ainsi définir deux fonctions définies sur ℝ :

$$\cos : x \longmapsto \cos(x) \text{ et } \sin : x \longmapsto \sin(x)$$

Remarque :
Pour tout réel x on a , $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.
On en déduit que les représentations graphiques de ces deux fonctions sont comprises entre les droites d'équations $y=1$ et $y=-1$.

2) PARITÉ

Définition :

Soit f une fonction définie sur un ensemble I **centré en zéro**.

- On dit que f est **paire** si, pour tout réel x de I , $f(-x)=f(x)$.
- On dit que f est **impaire** si, pour tout réel x de I , $f(-x)=-f(x)$.

I centré en zéro signifie que pour tout élément x de I , $-x$ est aussi dans I.

Propriété :

Pour tout réel x, on a $\cos(-x)=\cos x$. La fonction cos est **paire**.

Interprétation graphique dans un repère orthogonal :

Les points $M(x\,;\cos(x))$ et $M'(-x\,;\cos(-x))$ qui sont des points de la courbe représentative de la fonction cos sont symétriques par rapport à l'**axe des ordonnées**.
La représentation graphique de la fonction cos admet donc l'**axe des ordonnées** pour **axe de symétrie**.

De façon plus générale :
Propriété :

Dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$, la courbe représentative d'une fonction paire admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

Propriété :

Pour tout réel x, on a $\sin(-x)=-\sin x$. La fonction sin est **impaire**.

Interprétation graphique dans un repère :

Les points $M(x\,;\sin(x))$ et $M'(-x\,;\sin(-x))$ qui sont des points de la courbe représentative de la fonction sin sont symétriques par rapport à **l'origine du repère**.
La représentation graphique de la fonction sin admet donc **l'origine du repère** pour **centre de symétrie**.

De façon plus générale :
Propriété :

Dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$, la courbe représentative d'une fonction impaire admet l'origine du repère pour centre de symétrie.

3) PÉRIODICITÉ

Pour tout réel x,

$$\cos(x+2\pi)=\cos x \text{ et } \sin(x+2\pi)=\sin x$$

On dit que les fonctions cos et sin sont **périodiques** de période 2π

Interprétation graphique dans un repère :

Il suffit de représenter ces courbes sur un intervalle d'amplitude 2π, puis on complète les courbes en utilisant des translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$ $(k\in\mathbb{Z})$.

4) VARIATIONS

On déduit ces deux tableaux du cercle trigonométrique :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
cos	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
sin	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

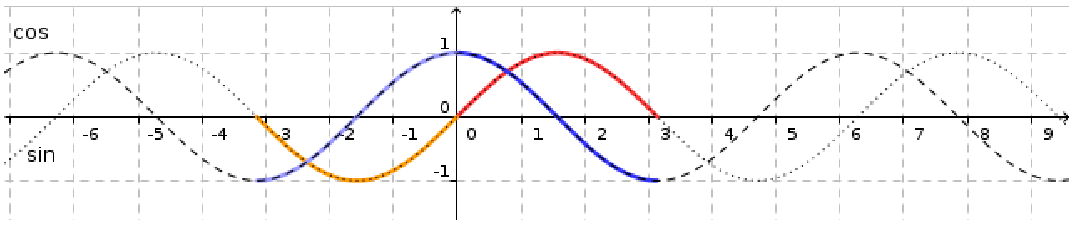
5) COURBES REPRÉSENTATIVES

- En établissant un tableau de valeurs, on trace les courbes représentatives des fonctions sin et cos sur $[0\,;\pi]$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

- La fonction cos est paire . On complète la courbe sur $[-\pi\,;\pi]$, en utilisant la symétrie d'axe (Ox).
- La fonction sin est impaire . On complète la courbe sur $[-\pi\,;\pi]$, en utilisant la symétrie de centre O.
- Les fonctions sin et cos sont périodiques de période 2π . On complète les courbes en utilisant des translations de vecteurs $2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

Courbes représentatives des fonctions cos et sin :



Les courbes représentant ces deux fonctions sont **des sinusoïdes**

6) DÉRIVÉES

Propriété : *admise*

Les fonctions sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $\cos'(x)=-\sin x$ et $\sin'(x)=\cos x$

Remarque :
On retrouve les variations des fonctions sin et cos sur $[0\,;\pi]$, en étudiant le signe de la dérivée de chacune de ces fonctions :

- $\forall x\in[0\,;\pi]$, $\sin x\geq 0$ et donc $\cos'(x)\leqslant 0$ ...

- $\forall x\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x\geqslant 0$ et donc $\sin'(x)\geqslant 0$ …
- $\forall x\in\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$, $\cos x\leqslant 0$ et donc $\sin'(x)\leqslant 0$ …

Propriété :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0 \quad \textit{en plus}$$

Preuve :
En utilisant la définition du nombre dérivé, on obtient :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin 0}{x-0}=\cos 0=1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 0}{x-0}=-\sin 0=0$$