LOGARITHME NÉPÉRIEN

1) DÉFINITION

Rappel :

La fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0\,;+\infty[$.
C'est-à-dire que pour tout $b\in]0\,;+\infty[$, il existe **un unique** réel a tel que $e^a=b$.
On note $a=\ln b$, ce qui se lit logarithme népérien de b . Ainsi à tout réel x strictement positif, on peut associer un unique réel noté $\ln(x)$.

Définition :

On appelle **fonction logarithme népérien** la fonction qui à un réel x strictement positif, fait correspondre $\ln(x)$.

$$\ln :]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \ln x$$

On écrit souvent $\ln x$ au lieu de $\ln(x)$

Remarques :

- La fonction $\ln$ est une bijection de $]0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
- L'équivalence $\begin{cases} x\in\mathbb{R}_+^* \\ y=\ln x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\in\mathbb{R} \\ e^y=x \end{cases}$ traduit le fait que les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont réciproques l'une de l'autre.

Propriétés :

• Pour tout réel x strictement positif, on a $e^{\ln x}=x$ • Pour tout réel x , on a $\ln(e^x)=x$	• $\ln 1=0$ • $\ln e=1$

Résulte de la définition

Remarque :

La fonction exponentielle transformant une somme en produit, on peut penser que la fonction logarithme népérien qui est sa fonction réciproque, transforme un produit en somme.

2) PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

Propriétés :

Pour tous réels a et b strictement positifs on a :

- $\ln(a\times b)=\ln a+\ln b$
  On peut généraliser cette propriété à plusieurs nombres.
- $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln a$
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$
- $\ln(\sqrt{a})=\dfrac{1}{2}\ln a$
- Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $\ln(a^n)=n\ln a$

Preuve :

Les démonstrations se font principalement en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle.

- $e^{\ln a+\ln b}=e^{\ln a}\times e^{\ln b}=a\times b$. Or si $e^y=x$, alors $y=\ln x$. On a donc $\ln a+\ln b=\ln(a\times b)$
- $e^{-\ln a}=\dfrac{1}{e^{\ln a}}=\dfrac{1}{a}$ donc $-\ln a=\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)$
- $e^{\ln a-\ln b}=\dfrac{e^{\ln a}}{e^{\ln b}}=\dfrac{a}{b}$ donc $\ln a-\ln b=\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$
- $\ln(a)=\ln(\sqrt{a}\times\sqrt{a})=\ln(\sqrt{a})+\ln(\sqrt{a})=2\ln(\sqrt{a})$ donc $\ln(\sqrt{a})=\dfrac{1}{2}\ln(a)$
- Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $e^{n\ln a}=(e^{\ln a})^n=a^n$ donc $\ln a^n=n\ln a$

3) ÉTUDE DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Propriété :

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

La croissance de la fonction ln est lente.
Par exemple : $\ln(10^8)\approx 18{,}42$

Preuve :

Soit a et b deux réels strictement positifs tels que $a<b$.
Raisonnons par l'absurde :

Supposons que $\ln a \geqslant \ln b$
La fonction exponentielle étant croissante on aurait $e^{\ln a} \geqslant e^{\ln b}$ donc $a \geqslant b$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

On ne peut donc pas avoir $\ln a \geqslant \ln b$.
On a donc $\ln a < \ln b$
On en déduit que la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

<u>Conséquences :</u>

Pour tous réels a et b strictement positifs on a :

- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
- $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$
- $\ln a \leqslant \ln b \Leftrightarrow a \leqslant b$
- $a > 1 \Leftrightarrow \ln a > 0$
- si $0 < a < 1$ alors $\ln a < 0$

<u>Propriété :</u>

La fonction $\ln$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

<u>Preuve :</u> *non exigible*

Soit $x > 0$ et $a > 0$.
Déterminons $\lim\limits_{x \to a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a}$
En posant $X = \ln(x)$ et $A = \ln(a)$, on obtient : $\lim\limits_{x \to a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} = \lim\limits_{X \to A} \frac{X - A}{e^X - e^A}$

Or on sait que la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$
Donc $\lim\limits_{X \to A} \frac{e^X - e^A}{X - A} = e^A = e^{\ln(a)} = a$ et $\lim\limits_{x \to a} \frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} = \lim\limits_{X \to A} \frac{X - A}{e^X - e^A} = \frac{1}{a}$

La fonction $\ln$ est donc dérivable en a, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$.
On en déduit que la fonction $\ln$ est dérivable (et donc continue) sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

<u>Remarque :</u>
On sait que pour tout $x > 0$, $e^{\ln x} = x$.
En supposant la fonction ln dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et en utilisant la propriété de dérivation des fonctions composées, on peut écrire pour tout $x > 0$:

$$(e^{\ln x})' = (\ln x)' \times e^{\ln x} \Leftrightarrow (x)' = (\ln x)' \times x \Leftrightarrow (\ln x)' = \frac{1}{x}$$ *(et en acceptant les abus de notation pour faciliter)*

<u>Propriétés :</u>

- La fonction $\ln$ est la primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1.
- Les primitives de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $x \longmapsto \ln x + k$ (où $k \in \mathbb{R}$)

<u>Propriétés :</u>

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

<u>Preuve :</u>

- Soit $M > 0$.
  Pour tout $x > 0$, on a : $\ln x > M \Leftrightarrow x > e^M$

  Ainsi, si $x > e^M$ on a $\ln x > M$
  Ce résultat est vrai pour tout $M > 0$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
- Posons $X = \frac{1}{x}$ c'est-à-dire $x = \frac{1}{X}$

  Lorsque x tend vers 0 par valeurs positives X tend vers $+\infty$.

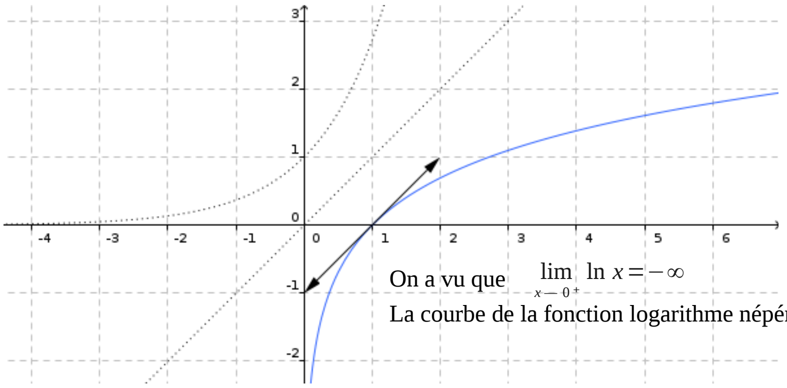
  On a $\ln x = \ln\left(\frac{1}{X}\right) = -\ln X$

  Donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = \lim\limits_{X \to +\infty} -\ln X$. On sait que $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

Tableau de variations :

x	0	$+\infty$
$\ln$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

Représentation graphique :



Les fonctions exponentielle et logarithme népérien étant réciproques l'une de l'autre, leurs courbes dans un repère orthonormal sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

On a vu que $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

La courbe de la fonction logarithme népérien a pour asymptote verticale l'axe (Oy).

Propriété :

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Preuve : *exigible*

Par définition du nombre dérivé en 1, on peut écrire $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x} = \dfrac{1}{1} = 1$ (car $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$)

Propriétés :

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$	• $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$

Au voisinage de l'infini x l'emporte sur $\ln x$.

Preuve :

- Posons $X = \ln x$ on a alors $e^X = x$
  Lorsque x tend vers $+\infty$, $\ln x$ tend vers $+\infty$, donc X tend vers $+\infty$.
  On peut écrire $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{X}{e^X}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X}{e^X}$.
  Or on sait que $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$ donc $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X}{e^X} = 0$ et par conséquent $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

- Posons $X = \dfrac{1}{x}$ on a alors $x = \dfrac{1}{X}$
  Lorsque x tend vers 0 par valeurs positives, $\dfrac{1}{x}$ tend vers $+\infty$, donc X tend vers $+\infty$.
  On peut écrire $x \ln(x) = \dfrac{1}{X} \times \ln\left(\dfrac{1}{X}\right) = -\dfrac{1}{X} \times \ln(X) = -\dfrac{\ln(X)}{X}$
  Or on sait que $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$

4) DÉRIVÉE DE $x \longmapsto \ln(u(x))$

Propriété :

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
La fonction $f : x \longmapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$, on a : $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Immédiat en utilisant, la dérivée de $x \longmapsto g(u(x))$

Propriété :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, et qui ne s'annule pas sur I.
La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ admet des primitives sur I.
L'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions de la forme $x \longmapsto \ln|u(x)| + k$ (où $k \in \mathbb{R}$)

5) LOGARITHME DÉCIMAL

La fonction logarithme népérien est particulièrement intéressante du fait de sa propriété de transformation d'un produit en somme. Mais comme on utilise, pour écrire les nombres, le système décimal, on lui préfère parfois une autre fonction possédant la même propriété de transformation de produit en somme mais prenant la valeur 1 lorsque $x=10$ (et donc la valeur 2 lorsque $x=100$, la valeur 3 lorsque $x=1000$ etc...)
Cette fonction sera appelée fonction logarithme décimal ou fonction logarithme de base 10.

Définition :

On appelle fonction logarithme décimal et on note $\log$ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$\log :]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{\ln x}{\ln 10}$$

Propriétés :

- $\log 1=0$ et $\log 10=1$
- Pour tous réels a et b strictement positifs on a :
  $\log(a\times b)=\log a+\log b$; $\log\frac{1}{a}=-\log a$; $\log\frac{a}{b}=\log a-\log b$; $\log\sqrt{a}=\frac{1}{2}\log a$
- Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $\log a^n=n\log a$

Preuve :

- $\log 1=\frac{\ln 1}{\ln 10}=\frac{0}{\ln 10}=0$ et $\log 10=\frac{\ln 10}{\ln 10}=1$
- $\log(ab)=\frac{\ln(ab)}{\ln 10}=\frac{\ln a+\ln b}{\ln 10}=\frac{\ln a}{\ln 10}+\frac{\ln b}{\ln 10}=\log a+\log b$
- $\log\frac{1}{a}=\frac{\ln(a)}{\ln 10}=\frac{-\ln a}{\ln 10}=\frac{\ln a}{\ln 10}=-\log a$
- $\log\frac{a}{b}=\frac{\ln\left(\frac{a}{b}\right)}{\ln 10}=\frac{\ln a-\ln b}{\ln 10}=\frac{\ln a}{\ln 10}-\frac{\ln b}{\ln 10}=\log a-\log b$
- $\log\sqrt{a}=\frac{\ln\sqrt{a}}{\ln 10}=\frac{\frac{1}{2}\times\ln a}{\ln 10}=\frac{1}{2}\times\frac{\ln a}{\ln 10}=\frac{1}{2}\log a$
- Pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $\log a^n=\frac{\ln a^n}{\ln 10}=\frac{n\ln a}{\ln 10}=n\times\frac{\ln a}{\ln 10}=n\log a$

Remarques :

- La fonction logarithme décimal étant définie par $\log x=k\times\ln x$ avec $k=\frac{1}{\ln 10}$

  Il est facile d'étudier ses variations et de donner sa courbe représentative.

- Soit a un réel strictement positif tel que $a\neq 1$.
  On définit de manière analogue la fonction logarithme de base a, notée $\log_a$:

$$\log_a :]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{\ln x}{\ln a}$$