Correction de l'ex 23

1)

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\ln x)^2 = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -\ln(x^2) = +\infty$$

donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} [(\ln x)^2 - 2\ln x]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln x(\ln x - 2) = +\infty.$$

$\forall x > 0,\ f'(x) = \dfrac{2\ln x}{x} - \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2\ln x - 2}{x}$ donc $f'(x)$ a le même signe que : $2\ln x - 2$.

Or $2\ln x - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant e$.

x	0		e		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖ $+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2)

$$\lim_{x\to-\infty} (1-x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} \ln(1-x) = +\infty$$

donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{X\to 0} X\ln X = 0.$$

$$\forall x \in D,\ f'(x) = -\ln(1-x) + (1-x)\times\frac{-1}{1-x}$$

$$= -\ln(1-x) - 1.$$

Or $-\ln(1-x) - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(1-x) \leqslant -1$

$\Leftrightarrow 1 - x \leqslant e^{-1} \Leftrightarrow x \geqslant 1 - e^{-1}$.

x	$-\infty$		$1-e^{-1}$		1
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	‖
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	0 ‖

3)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x+1}{2e^x+3} = \frac{1}{3} \text{ donc } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \ln\frac{1}{3} = -\ln 3.$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+1}{2e^x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+e^{-x}}{2+3e^{-x}} = \frac{1}{2} \text{ donc}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2.$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{e^x(2e^x+3) - 2e^x(e^x+1)}{(2e^x+3)^2}\times\frac{2e^x+3}{e^x+1}$$

$$= \frac{e^x}{(2e^x+3)(e^x+1)} \text{ donc } f'(x) > 0.$$

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	
Variations de f	$-\ln 3$	$\nearrow$	$-\ln 2$