Intégrale d'une fonction continue et positive

Calculer une intégrale avec les formules d'aires

Ex 1 : ***Vrai ou faux***

1) L'intégrale d'une fonction positive s'exprime en unité de longueur.
2) L'intégrale d'une fonction positive est définie à l'aide d'une aire.
3) Le résultat de $\int_a^b f(x)\,dx$ dépend de x .
4) Si f est une fonction positive et si $a<b$, alors $\int_a^b f(x)\,dx$ peut être strictement négative.

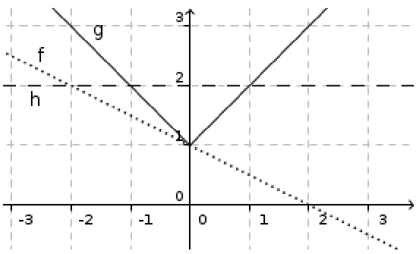
Ex 2 :

Dans chacun des cas, vérifier que la fonction proposée est positive sur $[a;b]$, puis calculer son intégrale sur $[a;b]$.

1) $f(x)=3x-1$ sur $[2;5]$ 2) $f(x)=|x-3|$ sur $[1;4]$

Ex 3 : ***À partir d'une représentation graphique***

Trois fonctions sont représentées ci-contre, positives sur $[-1;1]$. Déterminer l'expression de chacune d'elle, puis en utilisant des formules d'aires connues déterminer les intégrales de ces fonctions entre -1 et 1.



Ex 4 : ***Avec une fonction affine par morceaux***

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-2;4]$ par :

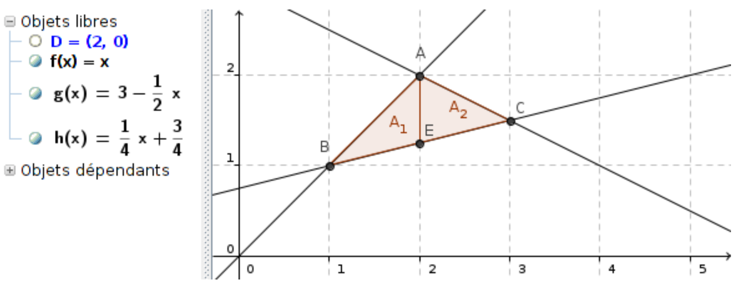
$$f(x)=\begin{cases} 2 \text{ si } x\le 0 \\ x+2 \text{ si } 0<x\le 2 \\ -\dfrac{3}{2}x+7 \text{ si } x>2 \end{cases}$$

1) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal, puis vérifier que cette fonction est continue et positive sur $[-2;4]$.
2) Déterminer $\int_{-2}^{4} f(x)\,dx$

Ex 5 : ***Avec un demi-cercle***

Soit f la fonction définie sur $[-1;1]$ par $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.
1) Représenter sur la calculatrice, la courbe représentative C_f de f dans un repère orthonormal.
2) Montrer que C_f est un demi-cercle.
3) Déterminer $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

Ex 6 :



1) Associer chaque fonction avec sa représentation graphique et déterminer les coordonnées des points A, B et C.

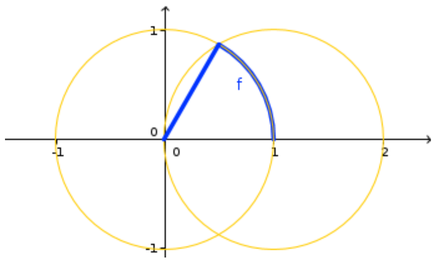
2) En calculant $\int_1^2 f(x)\,dx$ et $\int_1^2 h(x)\,dx$ déterminer l'aire A_1 .

3) Déterminer l'aire A_2 , puis l'aire du triangle ABC.

Ex 7 :

Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre (en gras)

Déterminer $\int_0^1 f(x)\,dx$



Ex 8 : ***Algorithme : sommes de Riemann***

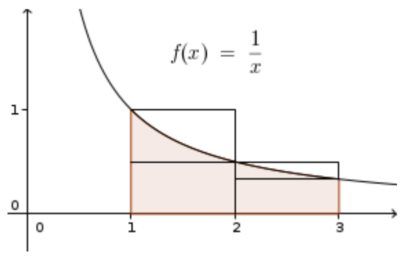
On considère l'algorithme ci-dessous :

	Traduction en Python

lire,a,b,p
s1←1
s2←0
n←0
tant que (s1-s2)>p faire
n←n+1
s1←0
s2←0
Pour i allant de 0 à n-1
s1 ← s1+(b-a)/n*1/(a+i*(b-a)/n)
s2 ← s2+(b-a)/n*1/(a+(i+1)*(b-a)/n)
Fin pour
Fin tant que
Afficher s1,s2
	a=float(input("a=")) faire tourner le programme
	b=float(input("b="))
	p=float(input("p="))
	s1=1
	s2=0
	n=1
	while (s1-s2>p):
	n=n+1
	s1=0
	s2=0
	for i in range(0,n):
	s1=s1+(b-a)/n*1/(a+i*(b-a)/n)
	s2=s2+(b-a)/n*1/(a+(i+1)*(b-a)/n)
	print(s1)
	print(s2)

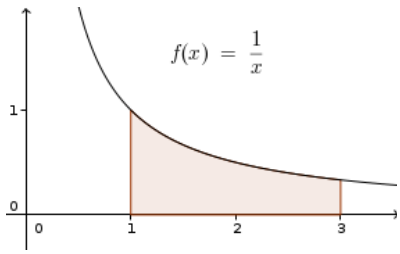
1) On choisit $p=0,1$.
Quelles valeurs doit-on choisir pour a et b afin d'encadrer l'aire ci-contre ?

À quoi correspond cette aire ?



La représentation graphique correspond au cas $n=2$ de l'algorithme.
Indiquer sur le graphique à quoi correspondent s1 et s2.

2) Sur le graphique ci-contre représenter le cas $n=4$.



3) Expliquer pourquoi on a choisi les valeurs 1 et 0 pour s1 et s2 au début de l'algorithme

4) Programmer l'algorithme et déterminer ce qu'il renvoie pour p =0,001

Propriétés de l'intégrale

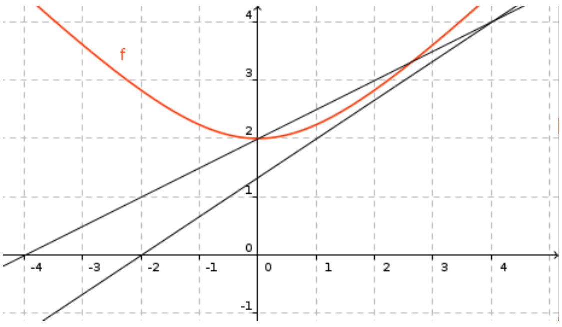
Ex 9 : ***Encadrer une intégrale***

1) Démontrer que pour tout $x\in[0;1]$, on a $1\leqslant e^{x^2}\leqslant e$, puis en déduire un encadrement de $I=\int_0^1 e^{x^2}\,dx$

2) Démontrer que pour tout $x\in[0;8]$, on a $1\leqslant\sqrt{1+x}\leqslant 3$, puis en déduire un encadrement de $J=\int_0^8\sqrt{1+x}\,dx$

3) On a représenté ci-dessous la fonction $f:x\longmapsto\sqrt{4+x^2}$.

En exploitant les données du graphique, donner un encadrement de $\int_0^2 f(x)\,dx$



Ex 10 : ***Encadrer une intégrale - Relation de Chasles***

Soit la fonction f définie sur $[-1;1]$ par $f(x)=e^{x^3}$.

On pose $I=\int_{-1}^1 e^{x^3}\,dx$

1) Démontrer que la fonction f est monotone et positive sur $[-1;1]$.

2) Démontrer que pour tout $x\in[-1;1]$, $f(-1)\leqslant f(x)\leqslant f(1)$.
En déduire un encadrement de I.

3) Démontrer que :

- $\forall x\in[-1;0]$, $f(-1)\leqslant f(x)\leqslant f(0)$
- $\forall x\in[0;1]$, $f(0)\leqslant f(x)\leqslant f(1)$

En déduire un nouvel encadrement de I.
On pourrait maintenant découper l'intervalle en 3, puis en 4 … et obtenir des encadrements de plus en plus fin de I … l'algorithme pointe son nez, très ressemblant à celui de l'ex 8 !

Ex 11 : ***Valeur moyenne***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=e^{-x}$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note u_n la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[n;n+1]$.

1) Donner l'expression de u_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2) Montrer que :
$\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in[n;n+1]$, $e^{-(n+1)}\leqslant e^{-x}\leqslant e^{-n}$

3) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Primitives

Ex 12 : ***Déterminer les primitives***

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives F de f sur l'intervalle I indiqué.

1) $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+2x+1$ sur $I=]0;3[$

2) $f(x)=-\frac{5}{x^3}$ sur $I=\mathbb{R}_-^*$

3) $f(x)=-\frac{2}{x}+\frac{1}{3}e^x+1$ sur $I=\mathbb{R}_+^*$

Ex 13 : ***Déterminer une primitive vérifiant une condition***

Dans chacun des cas, déterminer la primitive F de f sur l'intervalle I indiqué vérifiant la condition donnée.

1) $f(x)=3e^x+x^2+x^4$ sur $I=\mathbb{R}$ et telle que $F(0)=0$

2) $f(x)=\frac{1}{x}+e^x$ sur $I=\mathbb{R}_+^*$ et telle que $F(1)=0$

3) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+x+1$ sur sur $I=\mathbb{R}_+^*$ et telle que $F(1)=4$

Ex 14 : ***Primitives de la fonction racine carrée***

Démontrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction racine carrée f .
En déduire l'ensemble des primitives de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ex 15 : ***Primitives de fonctions composées***

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives F de f sur l'intervalle I indiqué.

1) $f(x)=x^3(x^4+1)^8$ sur $I=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\frac{3}{2x+1}$ sur $I=\mathbb{R}^+$

3) $f(x)=5e^{2x-3}$ sur $I=\mathbb{R}$

4) $f(x)=\frac{x^4}{x^5+2}$ sur $I=\mathbb{R}^+$

5) $f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}$ sur $I=\mathbb{R}$

6) $f(x)=\left(x^5-\frac{1}{6}\right)(x^6-x)^4$ sur $I=\mathbb{R}$

7) $f(x)=\frac{x}{(x^2-2)^6}$ sur $I=]\sqrt{2};+\infty[$

8) $f(x)=\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ sur $I=\mathbb{R}_+^*$

Ex 16 : ***Un cas compliqué***

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2(x+1)^{2017}$.

1) Déterminer trois réels a , b et c tels que :
$\forall x\in\mathbb{R}$, $x^2=a(x+1)^2+b(x+1)+c$

2) En déduire les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Ex 17 : ***Calculer une intégrale d'une fonction positive avec une primitive***

Calculer, à l'aide de primitives, les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$

2) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^4(x^5-1)^2\,\mathrm{d}x$

3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{u^3}{\sqrt{u^4+6}}\,\mathrm{d}u$

4) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+9)^3\,\mathrm{d}x$

Ex 18 : ***Décomposition en éléments simples***

Soit f la fonction définie sur $\mathrm{I}=[0;5]$ par $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$

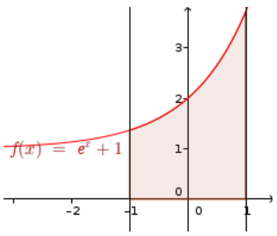
1) Démontrer que f est continue et positive sur $\mathrm{I}=[0;5]$.

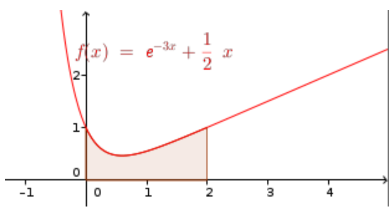
2) Démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}$.

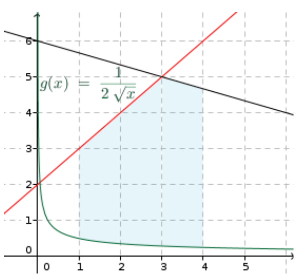
En déduire $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$

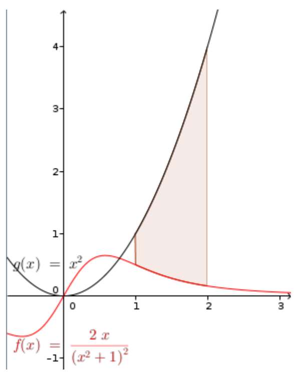
Ex 19 : ***Calculs d'aires***

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer l'aire (en unité d'aire) du domaine colorié :









Remarque : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)-g(x)\,\mathrm{d}x$

Ex 20 : ***Interprétation de Xcas***

1)

```
g(t):=3*exp(-3*t);
f(x):=integrate(g(t),t,0,x);
f(x);
limite(f(x),x,+infinity)
```

$(\ t \ \to 3\cdot\exp((-3)\cdot t), \quad x \ \to \int_0^x g(t)\,dt, \ -\exp(-3\cdot x)+1, \ 1 \ )$

Interpréter chacune des lignes ci-dessus.

2) Interpréter ce résultat graphiquement.

Ex 21 : $\mathrm{F}(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(t)=\mathrm{e}^{-t^2}$.

Pour tout $x\geqslant 0$, on pose $\mathrm{F}(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$

1) La fonction F est-elle dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

2) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{F}(x)}{x}$. (On fera apparaître un taux d'accroissement)

Ex 22 : ***Une primitive de la fonction ln***

Soit F et G deux fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\mathrm{F}(x)=\displaystyle\int_1^x \ln(t)\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{G}(x)=x\ln(x)-x$.

1) Démontrer que F et G sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer leur dérivée.

2) En déduire qu'il existe un réel k tel que, pour tout $x>0$, $\mathrm{F}(x)=\mathrm{G}(x)+k$.

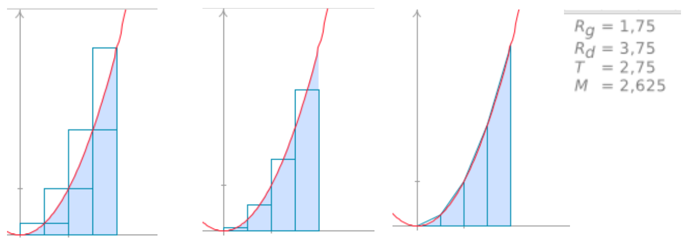
3) Calculer k .

4) Calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln(t)\,\mathrm{d}t$

Ex 23 : ***Différentes méthodes d'approximation***

Ci-dessous, on a représenté trois algorithmes fournissant des approximations de $\displaystyle\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x$.

1) On reconnaît la méthode des trapèzes, la méthode des rectangles et la méthode du point milieu.



Faire correspondre chaque dessin avec la méthode qu'il représente et expliquer chacune de ces méthodes.

2) Calculer $\displaystyle\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x$ et comparer avec les approximations obtenues.

Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

Ex 24 : ***Vrai ou faux***

1) Si f est une fonction négative et si $a<b$, alors l'intégrale de f entre a et b est égale à une aire.

2) L'intégrale d'une fonction négative est un réel négatif.

3) L'intégrale d'une fonction de signe quelconque est une somme d'aires.

4) Si f est une fonction continue de signe quelconque sur $[a;b]$ et si F est une primitive de f , l'égalité $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$ est fausse.

Ex 25 : ***Propriétés de l'intégrale***

Soit a et b des nombres réels tels que $a<b$, f et g des fonctions continues sur $[a;b]$.

On pose $\mathrm{I}=\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$ et $\mathrm{J}=\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$

Exprimer les intégrales suivantes en fonction de I et J .

1) $\int_b^a f(x)\ \mathrm{d}x$ 2) $\int_a^b f(x)-g(x)\ \mathrm{d}x$

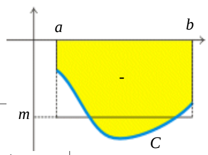
3) $c\in[a;b]$, $\int_b^c g(x)\ \mathrm{d}x$ - $\int_a^c g(x)\ \mathrm{d}x$ 4) $\int_a^b -3x+\frac{2}{3}g(x)\ \mathrm{d}x$

Ex 26 : ***Calculer une intégrale avec une primitive***

Calculer, à l'aide de primitives, les intégrales suivantes :

1) $\int_{-2}^{2}\frac{\mathrm{e}^x-1}{(\mathrm{e}^x-x)^2}\mathrm{d}x$ 2) $\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{x}\ln(x)\mathrm{d}x$ 3) $\int_1^2\left(1-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt$

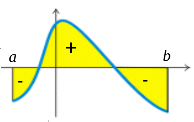
Ex 27 : ***Calculs d'aires***



Propriété :

Si f est **une fonction continue et négative** sur $[a;b]$, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, est l'opposé du nombre réel correspondant à l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe C , l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

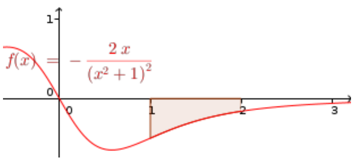
On dit parfois que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est l'aire algébrique du domaine pour indiquer qu'elle est positive si f est positive sur $[a;b]$, et négative si f est négative sur $[a;b]$

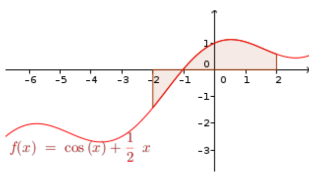


Propriété :

Si f est une fonction continue qui change de signe sur $[a;b]$, $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est la différence entre le nombre correspondant à l'aire obtenue lorsque f est positive et le nombre correspondant à l'aire obtenue lorsque f est négative.

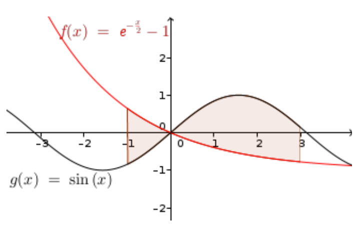
Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer l'aire (en unité d'aire) du domaine colorié :

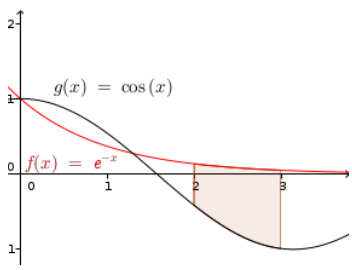




Remarque :

Comme on le verra plus tard $(\sin x)'=\cos x$ et $(\cos x)'=-\sin x$





Remarque :

En translatant du vecteur $k\vec{j}$ (avec k suffisamment grand), les deux courbes, tout devient positif ... En utilisant

$\int_a^b f(x)+k\,\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)+k\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)-g(x)\mathrm{d}x$, tout devient simple !

Ex 28 : ***Décomposition en éléments simples***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ -{-2} par $f(x)=\frac{x^3+3x^2+2x+1}{x+2}$

1) Déterminer quatre réels a , b , c et d tels que, pour tout $x\neq-2$, $f(x)=ax^2+bx+c+\frac{d}{x+2}$

2) En déduire $\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$

Ex 29 : ***Un encadrement de ln2***

1) Démontrer que pour tout $x\geqslant1$, $\frac{1}{x^2}\leqslant\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}$

2) En déduire que $\int_1^2\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\leqslant\int_1^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x\leqslant\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

3) Déterminer un encadrement du réel $\ln(2)$

Ex 30 : ***Étude d'une suite***

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose :

$\mathrm{I}_n=\int_0^1\frac{1}{1+t^n}\mathrm{d}t$, $\mathrm{J}_n=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^n}\mathrm{d}t$ et $\mathrm{K}_n=\int_0^1\ln(1+t^n)\mathrm{d}t$

1) a) Calculer I_1 .

b) Démontrer que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\geqslant1}$ est croissante et majorée par 1.

Que peut-on en déduire ?

2) a) Établir que pour tout $n>0$, $\mathrm{I}_n=1-\mathrm{J}_n$.

b) Montrer que pour tout $t\in[0;1]$, $0\leqslant\frac{t^n}{1+t^n}\leqslant t^n$.

c) En déduire que pour tout $n>0$, $0\leqslant\mathrm{J}_n\leqslant\frac{1}{n+1}$

d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{J}_n$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{I}_n$.

3) a) Montrer que pour tout $n>0$, la fonction F_n , définie par $\mathrm{F}_n(x)=\frac{x}{n}\ln(1+x^n)$ est dérivable sur $[0;1]$ et calculer sa dérivée.

b) En déduire que pour tout $n>0$, $\mathrm{J}_n=\frac{\ln(2)}{n}-\frac{1}{n}\mathrm{K}_n$.

c) Étudier les variations et le signe de la fonction F , définie par $\mathrm{F}(x)=\ln(1+x)-x$ sur $[0;1]$.

En déduire que pour tout $n>0$, $0\leqslant\mathrm{K}_n\leqslant\frac{1}{n+1}$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{K}_n$.

d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}(n(\mathrm{I}_n-1)+\ln(2))$

Ex 31 : ***La constante d'Euler***

Pour tout $n>0$, on pose $u_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\ln(n)$.

1) Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Démontrer, en encadrant la fonction inverse sur l'intervalle $[k;k+1]$, que $\frac{1}{k+1}\leqslant\int_k^{k+1}\frac{1}{t}\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{k}$.

En déduire que $\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$.

2) Démontrer que la suite (u_n) est monotone.

3) Établir, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, l'égalité :

$$u_n = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \ln(k+1) + \ln(k) \right)$$

4) Déduire des deux questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.
Sa limite que l'on ne cherchera pas à déterminer, est appelée la constante d'Euler.

EN ROUTE VERS LE BAC

Ex 32 : ***Baccalauréat S Pondichéry 17 avril 2015 - ex 1***

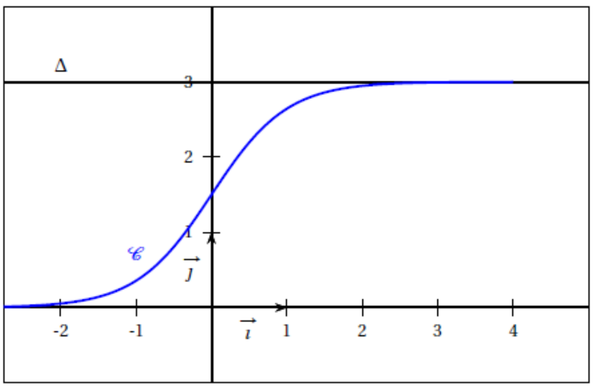
Avec la fonction exp – théorème des bijections – intégrales – domaines – aires

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3}{1+e^{-2x}}.$$

Sur le graphique ci-après, on a tracé, dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.



1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 2,999$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 3 - f(x)$.

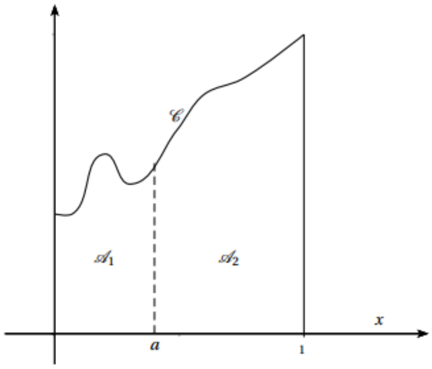
1. Justifier que la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$.
2. On désigne par H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = -\frac{3}{2}\ln\left(1+e^{-2x}\right)$.
   Démontrer que H est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.
3. Soit a un réel strictement positif.
   a. Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\int_0^a h(x)\,dx$.
   b. Démontrer que $\int_0^a h(x)\,dx = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+e^{-2a}}\right)$.
   c. On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan défini par
   $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ f(x) \leqslant y \leqslant 3 \end{cases}$
   Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine $\mathscr{D}$.

Ex 33 : ***Baccalauréat S Centre étrangers 10 juin 2016 - ex 2***

Intégrales – primitives – suites

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, continue et positive sur cet intervalle, et a une réel tel que $0 < a < 1$.
On note :

- $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal :
- $\mathscr{A}_1$ l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ d'une part, les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$ d'autre part.
- $\mathscr{A}_2$ l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ d'une part, les droites d'équations $x = a$ et $x = 1$ d'autre part.



Le but de cet exercice est de déterminer, pour différentes fonctions f, une valeur du réel a vérifiant la condition (E) : « les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ sont égales ».

On admet l'existence d'un tel réel a pour chacune des fonctions considérées.

Partie A : Étude de quelques exemples

1. Vérifier que dans les cas suivants, la condition (E) est remplie pour un unique réel a et déterminer sa valeur.
   a. f est une fonction constante strictement positive.
   b. f est définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = x$.
2. a. À l'aide d'intégrales, exprimer, en unités d'aires, les aires $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$.
   b. On note F une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
   Démontrer que si le réel a satisfait la condition (E), alors $F(a) = \frac{F(0)+F(1)}{2}$.
   La réciproque est-elle vraie ?
3. Dans cette question, on envisage deux autres fonctions particulières.
   a. La fonction f est définie pour tout réel x de $[0\,;\,1]$ par $f(x) = e^x$.
   Vérifier que la condition (E) est vérifiée pour un unique réel a et donner sa valeur.
   b. La fonction f définie pour tout réel x de $[0\,;\,1]$ par $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$.
   Vérifier que la valeur $a = \frac{2}{5}$ convient.

Partie B : Utilisation d'une suite pour déterminer une valeur approchée de a

Dans cette partie, on considère la fonction f définie pour tout réel x de $[0\,;\,1]$ par $f(x) = 4 - 3x^2$.

1. Démontrer que si a est un réel satisfaisant la condition (E), alors a est solution de l'équation :

$$x = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}.$$

Dans la suite de l'exercice, on admettra que cette équation a une unique solution dans l'intervalle $[0 ; 1]$. On note a cette solution.

2. On considère la fonction g définie pour tout réel x de $[0 ; 1]$ par $g(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}$ et la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = g(u_n)$.

a. Calculer u_1.

b. Démontrer que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

d. Prouver que la suite (u_n) est convergente. À l'aide des opérations sur les limites, prouver que la limite est a.

e. On admet que le réel a vérifie l'inégalité $0 < a - u_{10} < 10^{-9}$. Calculer u_{10} à 10^{-8} près.

Ex 34 : *Baccalauréat S Antilles-Guyane 9 septembre mai 2015 - ex 1*

Avec la fonction exp – suites d'intégrales – domaines – aires – propriétés de l'intégration

Soit n un entier naturel non nul.
On considère la fonction f_n définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f_n(x) = x^2 e^{-2nx}.$$

On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.
On définit, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

Partie A : Étude de la fonction f_1

1. La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = x^2 e^{-2x}$.
On admet que f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f_1' sa dérivée.

a. Justifier que pour tout réel x, $f_1'(x) = 2xe^{-2x}(1-x)$.

b. Étudier les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

c. Déterminer la limite de f_1 en $-\infty$.

d. Vérifier que pour tout réel x, $f_1(x) = \left(\frac{x}{e^x}\right)^2$. En déduire la limite de f_1 en $+\infty$.

2. En utilisant un système de calcul formel, on trouve qu'une primitive F_1 de la fonction f_1 est donnée par $F_1(x) = -e^{-2x}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)$.
En déduire la valeur exacte de I_1.

Partie B : Étude de la suite (I_n)

1. Soit n un entier naturel non nul.

a. Interpréter graphiquement la quantité I_n.

b. Émettre alors une conjecture sur le sens de variation et sur la limite éventuelle de la suite (I_n). Expliciter la démarche qui a mené à cette conjecture.

2. **a.** Justifier que, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0; 1]$,

$$f_{n+1}(x) = e^{-2x} f_n(x).$$

b. En déduire, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0; 1]$,

$$f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x).$$

c. Déterminer alors le sens de variation de la suite (I_n).

3. Soit n un entier naturel non nul.

a. Justifier que pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0; 1]$,

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant e^{-2nx}.$$

b. En déduire un encadrement de la suite (I_n), puis sa limite.

Ex 35 : *Baccalauréat S Amérique du Sud 24 novembre 2015 - ex 1*

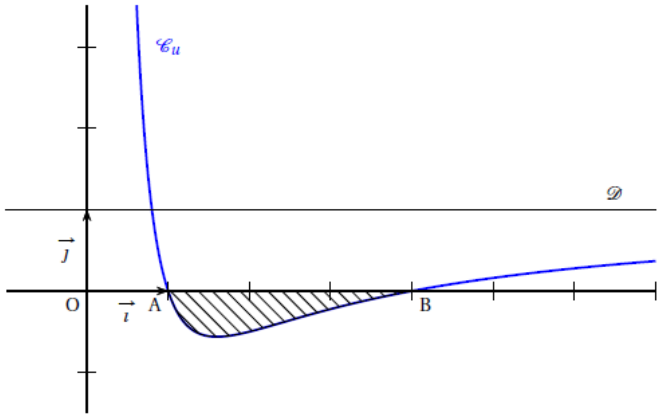
Avec la fonction ln – domaines – aires – théorème des bijections

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on désigne par $\mathscr{C}_u$ la courbe représentative de la fonction u définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$u(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$$

où a, b et c sont des réels fixés.
On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_u$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 1$.



On précise que la courbe $\mathscr{C}_u$ passe par les points A(1 ; 0) et B(4 ; 0) et que l'axe des ordonnées et la droite $\mathscr{D}$ sont asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_u$.

1. Donner les valeurs de $u(1)$ et $u(4)$.

2. Donner $\lim_{x \to +\infty} u(x)$. En déduire la valeur de a.

3. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $u(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2}$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 5\ln x - \frac{4}{x}.$$

1. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0. On pourra utiliser sans démonstration le fait que $\lim_{x \to 0} x \ln x = 0$.

2. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = u(x)$.
En déduire le tableau de variation de la fonction f en précisant les limites et les valeurs particulières.

Partie C

1. Déterminer l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en unité d'aire, du domaine hachuré sur le graphique de la **partie A**.

2. Pour tout réel λ supérieur ou égal à 4, on note $\mathscr{A}_\lambda$ l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine formé par les points M de coordonnées $(x ; y)$ telles que

$$4 \leqslant x \leqslant \lambda \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant u(x).$$

Existe-t-il une valeur de λ pour laquelle $\mathscr{A}_\lambda = \mathscr{A}$?
Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*