INTÉGRALES ET PRIMITIVES

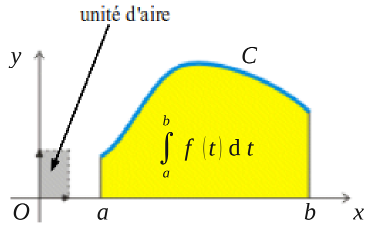
1) INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE ET POSITIVE

A) DÉFINITION

Définition :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

On appelle intégrale de a à b de la fonction f, et on note $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ le réel mesurant l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe C, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$, c'est-à-dire l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $\begin{cases} a\leqslant x\leqslant b \\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\end{cases}$



Remarques :

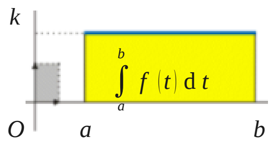
- On dit que a et b sont les bornes de l'intégrale.
- $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ se lit : " intégrale ou somme de a à b de *f*(*t*)d*t* ".
- La variable t est appelée variable "muette".

  On peut remplacer t par n'importe quelle autre variable : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
- L'unité d'aire est l'aire du rectangle défini par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

  Si le repère a pour unités graphiques 2 cm sur l'axe (Ox) et 3 cm sur l'axe (Oy), alors l'unité d'aire est $6\ cm^2$.

On appelle domaine D associé à une fonction f sur $[a\,;b]$ le domaine limité par la courbe C, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

Exemples :



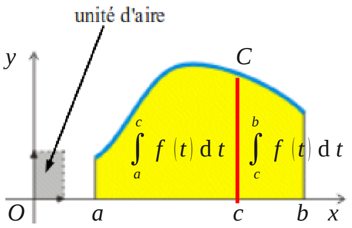
- Si $a=b$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=0$.
- Pour $k>0$, $\int_a^b k\,\mathrm{d}t=k(b-a)$. Le domaine D est un rectangle.

B) RELATION DE CHASLES

Propriété : *admise*

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$. Pour tout réel $c\in[a\,;b]$, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t+\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$



la relation de Chasles traduit l'additivité des aires.

C) LINÉARITÉ DE L'INTÉGRATION

Propriétés : *admises*

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle $[a\,;b]$ et λ un réel. On a :

- $\int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
- $\int_a^b (\lambda f)(t)\,\mathrm{d}t=\lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

D) POSITIVITÉ - ORDRE

Propriétés :

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle $[a\,;b]$:

- si pour tout x de $[a\,;b]$ on a $f(x) \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$
- si pour tout x de $[a\,;b]$ on a $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

On traduit la deuxième inégalité, en disant que si $a \leqslant b$ on peut intégrer l'inégalité $f \leqslant g$ sur $[a\,;b]$.

Preuve : *preuve de la deuxième propriété. non exigible*

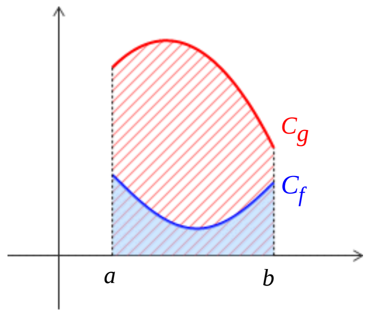
Pour tout x de $[a\,;b]$ on a $f(x) \leqslant g(x)$ donc $g(x) - f(x) \geqslant 0$

$a \leqslant b$, la propriété précédente permet donc d'affirmer que $\int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x \geqslant 0$

Ainsi $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ c'est-à-dire $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

Remarque :

L'inégalité $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ s'interprète de façon immédiate avec les aires :

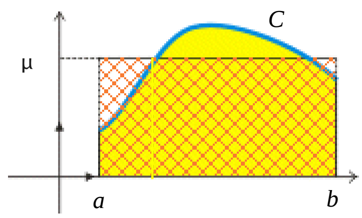


E) VALEUR MOYENNE

Définition :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.

Le nombre $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est appelé **valeur moyenne** de f entre a et b.



La valeur moyenne μ correspond à la hauteur du rectangle de base $(b-a)$ dont l'aire est égale à l'aire définie par $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

2) PRIMITIVES

A) DÉFINITION

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .
Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I , telle que pour tout x dans I , $F'(x) = f(x)$.

Une fonction est souvent notée par une lettre minuscule et l'usage est de noter une primitive (si elle existe) par la majuscule associée.

B) LIEN ENTRE DEUX PRIMITIVES

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si F est une primitive de f sur I , alors f admet une infinité de primitives.
Toute autre primitive de f sur I est définie par $G(x) = F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$

On dit que deux primitives d'une fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Preuve : *non exigible*

- F est dérivable sur I et $F' = f$. La fonction G est aussi dérivable sur I avec $G' = F' = f$.
  Donc G est une primitive de f sur I .
- Inversement, si G est une primitive de f sur I alors $G' = f = F'$ d'où $G' - F' = 0$.
  La dérivée de $G - F$ est nulle sur l'intervalle I donc $G - F$ est constante sur I . Il existe donc un réel k tel que pour tout x de I , $G(x) - F(x) = k$, d'où le résultat.

Propriété :

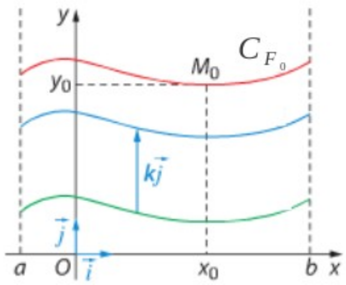
Soit f une fonction admettant des primitives sur I.
Pour tout couple de réels $(x_0\,;y_0)$ où x_0 est un réel donné dans I et y_0 est un réel quelconque, il existe une primitive et une seule F_0 de f sur I telle que $F_0(x_0) = y_0$

Preuve : *non exigible*

$F_0(x_0) = y_0 \Leftrightarrow F(x_0) + k = y_0 \Leftrightarrow k = y_0 - F(x_0)$
Donc l'unique primitive F_0 de f sur I vérifiant $F_0(x_0) = y_0$ est définie par $F_0(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$.

Remarque :

Les courbes représentatives des primitives de f se déduisent donc l'une de l'autre par des translations de vecteurs $k\vec{j}$ $(k \in \mathbb{R})$.
Une seule d'entre elles passe par le point M_0 de coordonnées $(x_0 ; y_0)$



C) CALCULS DE PRIMITIVES

Les opérations sur les fonctions dérivables et la définition d'une primitive conduisent aux résultats suivants :

- si F et G sont des primitives des fonctions f et g sur un intervalle I, alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.
- si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et λ un réel, alors λF est une primitive de λf sur I.

De même, les résultats connus sur les dérivées des fonctions usuelles donnent par « lecture inverse » les primitives.

On retiendra le tableau suivant :
Pour une fonction u dérivable sur un intervalle I, on a :

Une fonction de la forme	… admet pour primitive sur I les fonctions :
$u'\mathrm{e}^u$	$\mathrm{e}^u + k$, où $k \in \mathbb{R}$
$u' \times u^n$, où $n \in \mathbb{Z}$ $(n \neq -1)$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1} + k$, où $k \in \mathbb{R}$
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$, avec pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$	$2\sqrt{u} + k$, où $k \in \mathbb{R}$
$\dfrac{u'}{u}$, avec pour tout $x \in I$, $u(x) > 0$	$\ln(u) + k$, où $k \in \mathbb{R}$

D) ÉTUDE DE $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Théorème :

Soit f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$.
La fonction F définie sur $[a ; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a ; b]$ et a pour dérivée f.
Plus précisément, F est l'unique primitive de f *sur* $[a ; b]$ s'annulant en a.

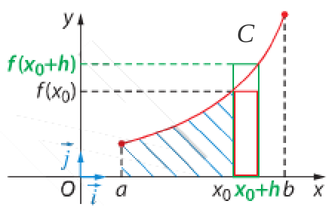
Preuve : *Idée de preuve (Cas où f est croissante)* *exigible*

Étudions la limite en x_0 (où x_0 est fixé) de la fonction T définie pour tout réel $h \neq 0$ tel que $x_0 + h$ est dans $[a ; b]$ par $T(h) = \dfrac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h}$

Si $h > 0$, $F(x_0+h) - F(x_0)$ correspond à l'aire sous la courbe C_f entre x_0 te $x_0 + h$.
(Si $h < 0$, on raisonne de même avec $F(x_0) - F(x_0+h)$)
Cette aire est comprise entre les aires des rectangles de base h et de hauteur $f(x_0)$ et $f(x_0+h)$
On a alors :

$$h\ f(x_0) \leqslant F(x_0+h) - F(x_0) \leqslant h\ f(x_0+h) \Leftrightarrow f(x_0) \leqslant \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)$$

Grâce au théorème des gendarmes et à la continuité de la fonction f en x_0, on en déduit que :
$\lim\limits_{h \to 0} T(h) = f(x_0)$
Ainsi F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.
L'unicité résulte du fait que $F(a) = 0$.



Remarque :
Ce théorème affirme l'existence de primitives pour toute fonction continue et positive sur un intervalle I.

Propriété :

Soit f est une fonction continue et positive sur un intervalle I, alors pour tous réels a et b de I, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a) \qquad \text{où } F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I.$$

Preuve : *non exigible*

On a vu que $x \longmapsto H(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f s'annulant en a.

Soit F une primitive de f sur I, on a donc : $F(x)=H(x)+k=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

Donc $F(a)=\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t+k=0+k=k$ et $F(b)=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+k$

Ainsi $F(b)-F(a)=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+k-k=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Remarque : On note aussi $F(b)-F(a)=[F(t)]_a^b$ qui se lit : " $F(t)$ pris entre a et b ".

E) THÉORÈME FONDAMENTAL

Théorème :

Si f est une fonction continue sur un intervalle, alors f admet des primitives sur cet intervalle.

Preuve : *Idée de preuve (Cas d'un intervalle fermé en admettant que f a un minimum)* *exigible*

On suppose que f est définie et continue sur un intervalle $[a\,;b]$ et que f admet un minimum m sur $[a\,;b]$.
La fonction $g: x\longmapsto f(x)-m$ est alors continue et positive sur $[a\,;b]$.
Elle admet donc une primitive G sur $[a\,;b]$.
On définit alors la fonction F sur $[a\,;b]$ par : $F(x)=G(x)+m\,x$
F est dérivable sur $[a\,;b]$ et, pour tout $x\in[a\,;b]$: $F'(x)=G'(x)+m=f(x)-m+m=f(x)$
Ainsi, f admet F pour primitive sur $[a\,;b]$.

3) INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE DE SIGNE QUELCONQUE

Théorème-définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I. Alors, pour tous réels a et b de I, la différence $F(b)-F(a)$ ne dépend pas de la primitive F de f choisie.

On définit l'intégrale de a à b de f par : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=F(b)-F(a)$

Deux primitives diffèrent d'une constante ...

La valeur moyenne, et les propriétés déjà vues pour les fonctions continues et positives (linéarité, positivité, relation de Chasles, $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$) se généralisent aux fonctions continues de signe quelconque.

Remarque :

Pour tous réels a et b, on a : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t=0$

On en déduit que :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=-\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$$