

## LIMITES DE FONCTIONS

### 1) LIMITES EN $+\infty$ ET EN $-\infty$

#### A) LIMITES INFINIES EN $+\infty$ ET EN $-\infty$

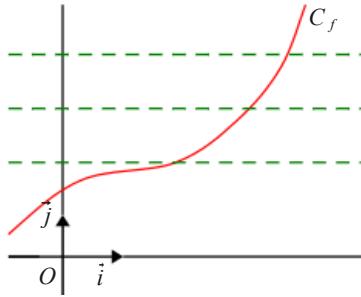
##### Définition :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $[a ; +\infty]$  où  $a$  est un réel.

Intuitivement, dire que  $f$  a pour limite  $+\infty$  en  $+\infty$ , signifie que lorsque  $x$  prend des valeurs de plus en plus grandes vers  $+\infty$ , « les nombres  $f(x)$  correspondants finissent par être aussi grands que l'on veut ».

On note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$



Lorsque  $x$  prend des valeurs de plus en plus grande, la courbe  $C_f$  finit par se situer au dessus de n'importe quelle droite horizontale.

##### Remarques :

- De manière plus mathématique (moins intuitive ...):
 

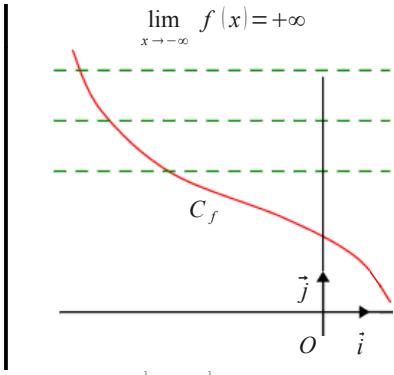
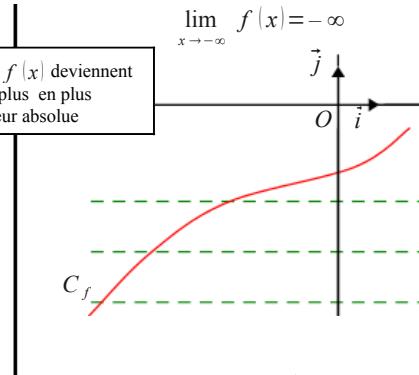
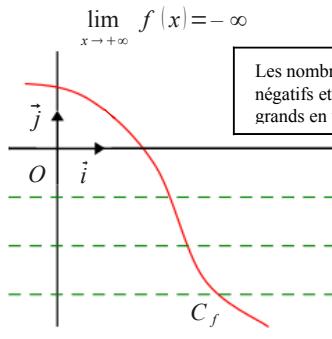
Tout intervalle de la forme  $[M ; +\infty]$  finit par contenir toutes les valeurs  $f(x)$ . On écrit aussi :

Pour tout réel  $M > 0$ , il existe un réel  $m$  tel que, si  $x > m$ , alors  $f(x) \in [M ; +\infty]$

- On dit aussi que la fonction  $f$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

**Exemples à connaître :**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

#### On définit de la même façon ...



Dans ces deux cas,  $f$  est définie sur un intervalle de la forme  $[-\infty ; b]$

##### Remarque :

Dans la pratique, on peut utiliser la remarque suivante :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x)$

#### B) LIMITES FINIES EN $+\infty$ ET EN $-\infty$ ET ASYMPTOTE HORIZONTALE

##### Définition :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $[a ; +\infty]$  où  $a$  est un réel et soit  $L$  un réel donné.

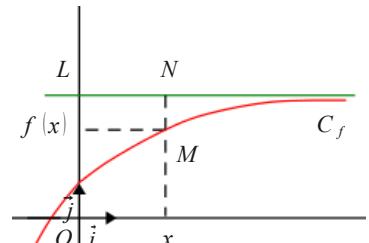
- Intuitivement, dire que  $f$  a pour limite  $L$  en  $+\infty$ , signifie que lorsque  $x$  prend des valeurs de plus en plus grandes vers  $+\infty$ , « les nombres  $f(x)$  correspondants viennent s'accumuler autour de  $L$  ».

On note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

- On dit que la droite d'équation  $y = L$  est **asymptote horizontale** à la courbe  $C_f$  en  $+\infty$ .

Lorsque  $x$  prend des valeurs de plus en plus grandes, la distance  $MN$  tend vers 0. La courbe  $C_f$  se rapproche sans cesse de la droite d'équation  $y = L$ .



##### Remarque :

De manière plus mathématique (moins intuitive ...):

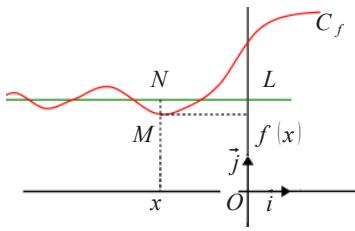
Tout intervalle ouvert contenant  $L$  finit par contenir toutes les valeurs  $f(x)$ . On écrit aussi :

Pour tout  $\varepsilon > 0$  (aussi petit qu'il soit) il existe un réel  $m$  tel que, si  $x > m$ , alors  $f(x) \in [L - \varepsilon ; L + \varepsilon]$ .

On définit de la même façon :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

$f$  est définie sur un intervalle de la forme  $[-\infty; b]$



La distance  $MN$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $-\infty$ .

La droite d'équation  $y = L$  est **asymptote horizontale** à la courbe  $C_f$  en  $-\infty$ .

### Exemples à connaître :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

La courbe représentant la fonction  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$  admet l'axe des abscisses comme asymptote en  $+\infty$ ; les trois autres courbes admettent cet axe comme asymptote en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

### Remarque :

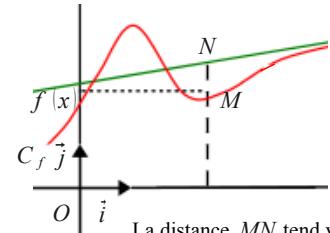
Une fonction n'a pas forcément une limite finie ou infinie quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . ( Par exemple  $x \mapsto \sin x$ ,  $x \mapsto \cos x$  ... )

## C) ASYMPTOTE OBLIQUE en plus ...

### Définition :

Soit  $a$  ( $a \neq 0$ ) et  $b$  deux réels et  $C$  la courbe représentant une fonction  $f$  dans un repère. Dire que la droite d'équation  $y = ax + b$  est asymptote oblique à  $C$  en  $+\infty$  (respectivement en  $-\infty$ ) revient à dire que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \quad (\text{respectivement } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0)$$



La distance  $MN$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

### Remarque :

Une fonction peut avoir une limite infinie lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$  ou vers  $-\infty$  sans que sa courbe possède une asymptote. (c'est le cas de la fonction carrée)

## 2 ) LIMITÉ EN $a$ (avec $a$ réel)

Lorsque que l'on définit la limite d'une fonction  $f$  en un réel  $a$ , on considère que : (a est un point d'accumulation)

- $a \in D_f$
- ou  $a$  est une borne de  $D_f$

## A) LIMITÉ INFINIE EN $a$ ET ASYMPTOTE VERTICALE

### Définition :

Soit  $f$  une fonction.

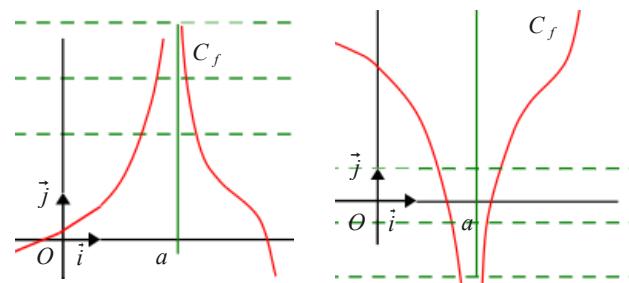
- Intuitivement, dire que  $f$  a pour limite  $+\infty$  en  $a$ , signifie que lorsque  $x$  prend des valeurs de plus en plus proches de  $a$ , « **les nombres  $f(x)$  correspondants finissent par être aussi grands que l'on veut** ».

On note :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

On définit de la même façon  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

- On dit que la droite d'équation  $x = a$  est **asymptote verticale** à la courbe  $C_f$ .



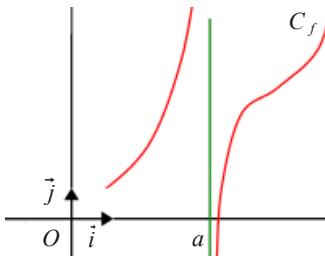
Lorsque  $x$  prend des valeurs de plus en plus proches de  $a$ , la courbe  $C_f$  finit par se situer au dessus (et en dessous pour la deuxième figure) de n'importe quelle droite horizontale.

### Remarque :

Il arrive souvent qu'on soit amené à définir des limites «d'un seul côté de  $a$ ».

Naturellement, on introduit les notions de **limite à droite en  $a$**  et de **limite à gauche en  $a$**  et on note :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \text{ ou encore } \lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow a, x < a} f(x)$$



Dans ce cas

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

### Exemples :

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3} = -\infty$

Les courbes représentant ces fonctions admettent l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.

## B ) Limite finie en $a$

On a déjà vu la notion de limite finie en zéro dans le chapitre sur la dérivation en 1S.

La notion de limite finie en  $a$  est identique ...

### Définition :

Soit  $f$  une fonction telle que  $a$  soit dans son ensemble de définition  $Df$  ou soit une borne de  $Df$  et soit  $L$  un réel donné.

Intuitivement, dire que  $f$  a pour limite  $L$  en  $a$ , signifie que lorsque  $x$  prend des valeurs de plus en plus proches de  $a$  « les nombres  $f(x)$  correspondants viennent s'accumuler autour de  $L$  ».

On note :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

### Remarques :

- De manière plus mathématique (moins intuitive ...) :

Tout intervalle ouvert contenant  $L$  finit par contenir toutes les valeurs  $f(x)$ . On écrit aussi :

Pour tout  $(\varepsilon > 0)$  (aussi petit qu'il soit) les nombres  $f(x)$  finissent par se situer dans l'intervalle  $|L - \varepsilon ; L + \varepsilon|$ .

- On admet que si une fonction  $f$  est définie en  $a$  et si  $f$  admet une limite finie en  $a$ , alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

C'est le cas, en tout point de l'ensemble de définition, des fonctions polynômes, rationnelles et trigonométriques, de la fonction racine carrée ...et des composées de ces fonctions.

Cette remarque nous permet de déterminer rapidement la limite d'une telle fonction en tout point de son ensemble de définition.

**Exemples :**  $\lim_{x \rightarrow 3} \sin(3x + 4) = \sin 13$  ,  $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x^2 + 3} = \sqrt{19}$

**Attention :** Comme nous le verrons en exercice, toutes les fonctions n'admettent pas forcément une limite finie en tout point de leur ensemble de définition. (*la limite à droite et la limite à gauche peuvent être différentes...*)

## 3 ) OPÉRATION SUR LES LIMITES *algèbre des limites*

Ces opérations sont identiques à celles déjà vues avec les suites.

Les théorèmes qui suivent, présentés sous forme de tableaux sont admis.

Pour la plupart d'entre eux, ils sont naturels mais ... comme souvent en math, il y a quelques cas particuliers.

Par convention et pour simplifier :

- on note  $\lim f$  et  $\lim g$  les limites de  $f$  et de  $g$ , toutes les deux en  $a$ , en  $+\infty$  ou en  $-\infty$
- on note par un point d'interrogation (?) les cas où il n'y a pas de conclusion générale.

On dit qu'il s'agit de cas de formes indéterminées . Ces cas nécessiteront une étude particulière chaque fois qu'ils se présenteront.

### • Limite de $k f$ ( où $k$ est un réel donné )

$\lim f$	$L$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim k f$ ( avec $k > 0$ )	$kL$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim k f$ ( avec $k < 0$ )	$kL$	$-\infty$	$+\infty$

**Exemple :** Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $g : x \mapsto -\frac{2}{x^2}$  .

On a  $g = -2 f$  avec  $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$

Comme  $-2 < 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ , on en déduit que  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$

### • Limite de $f + g$

$\lim f$	$L$	$L$	$L$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	$L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim (f + g)$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

**Exemple :** Soit la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $h : x \mapsto \sqrt{x} - \frac{2}{x^2}$

On a  $h = f + g$  avec  $f : x \mapsto \sqrt{x}$  et  $g : x \mapsto -\frac{2}{x^2}$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ , on en déduit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

• Limite de  $f \times g$

$\lim f$	$L$	$L > 0$	$L > 0$	$L < 0$	$L < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$0$
$\lim g$	$L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim (f \times g)$	$L \times L'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

**Exemple :** Soit la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $h : x \mapsto (x+2)\sqrt{x}$

On a  $h = f \times g$  avec  $f : x \mapsto x+2$  et  $g : x \mapsto \sqrt{x}$

Comme  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ , on en déduit que  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$

• Limite de  $\frac{f}{g}$

$\lim f$	$L$	$L$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L > 0$ ou $+\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	$L < 0$ ou $-\infty$	$0$
$\lim g$	$L'$	$+\infty$ ou $-\infty$	$L' > 0$	$L' < 0$	$L' > 0$	$L' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

Cas où la limite de  $g$  n'est pas nulle

Cas où la limite de  $g$  est nulle

**Remarques :**

- « 0 en restant négatif ou positif » signifie que  $g$  garde un signe constant au voisinage de  $a$ , en  $+\infty$  ou en  $-\infty$  suivant les cas.
- On note  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0^+$  pour indiquer que  $g(x)$  tend vers 0 en restant positive.
- On note  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0^-$  pour indiquer que  $g(x)$  tend vers 0 en restant négative.

**Exemple :** Soit la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $h : x \mapsto \frac{2x-4}{\sqrt{x}}$

On a  $h = \frac{f}{g}$  où  $f : x \mapsto 2x-4$  et  $g : x \mapsto \sqrt{x}$

Comme  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -4$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0^+$ , on en déduit que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty$

## 4 ) LIMITÉ D'UNE FONCTION COMPOSÉE

**Propriété :** admise

Soit  $f$ ,  $g$  et  $h$  trois fonctions telles que  $f(x) = g(h(x))$ . Chacune des lettres  $a$ ,  $b$  et  $c$  désigne soit un réel, soit  $+\infty$ , soit  $-\infty$ . Si  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$  et si  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$

Dans la pratique, on cherche d'abord la limite  $b$  de  $h$  en  $a$ , puis la limite de  $g$  en  $b$ .

**Preuve intuitive :** cas où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des réels.

On a  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$ . Ainsi, lorsque  $x$  tend vers  $a$ , les nombres  $h(x)$  se rapprochent de  $b$ .

Posons  $h(x) = X$ . On a alors  $f(x) = g(X)$ .

Lorsque les nombres  $X$  tendent vers  $b$ , alors les nombres  $g(X)$  se rapprochent de  $c$ , puisque  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$ .

On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow a} g(h(x)) = c$

**Exemple :** Soit  $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 5}$ . Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Posons  $X = 2x^2 - 3x + 5$ . On a alors  $f(x) = \sqrt{X}$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = +\infty$  et  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ . On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

**Remarque :**

Le procédé est identique pour une suite définie par  $u_n = g(v_n)$ . (par exemple la suite définie par  $u_n = \sqrt{2n^2 - 3n + 5}$ )

## 5 ) THÉORÈMES DE COMPARAISON

### A ) THÉORÈME DES GENDARMES

**Théorème des gendarmes ou théorème d'encadrement :** *admis*

Soit  $f, g$  et  $h$  trois fonctions définies sur un intervalle  $[b ; +\infty[$  où  $b$  est un réel et soit  $L$  un réel donné.

Si pour tout  $x \in ]b ; +\infty[, g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = L$ , alors,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$

Ce théorème reste valable pour des limites en  $-\infty$  et en un réel  $a$ . Il suffit dans les hypothèses de modifier le domaine de validité des inégalités.

**Exemple :** Soit  $f(x) = \frac{\cos x}{x}$ . Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , on a :  $-1 \leq \cos x \leq 1$ , donc  $-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$ .

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ . D'après le théorème des gendarmes, on déduit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

### B ) COMPARAISON À L'INFINI

**Propriété :**

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un intervalle  $[b ; +\infty[$  où  $b$  est un réel.

- Si pour tout  $x \in ]b ; +\infty[$   $g(x) \leq f(x)$  et si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- Si pour tout  $x \in ]b ; +\infty[$   $f(x) \leq g(x)$  et si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Ce théorème reste valable pour des limites en  $-\infty$ .

**Preuve :** non exigible

Soit  $M > 0$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ , il existe donc un réel  $m$  tel que, si  $x > m$ , alors  $g(x) \in ]M ; +\infty[$ .

Or  $g(x) \leq f(x)$ . On en déduit que, si  $x > m$ , alors  $f(x) \in ]M ; +\infty[$ .

Ce résultat est vrai pour tout réel  $M > 0$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Le deuxième résultat se démontre de la même façon.

**Exemple :** Soit  $f(x) = x - \sin x$ . Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a :  $-1 \leq -\sin x$ , donc  $x - 1 \leq x - \sin x$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$ . On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$