FONCTION EXPONENTIELLE

1) DÉFINITION

Propriété et définition :

Il existe une unique fonction f, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que :
$$f\,'=f \quad \text{et} \quad f(0)=1$$
Cette fonction, notée $\exp$, est appelée **fonction exponentielle**.

Preuve : *l'existence est admise – l'unicité est exigible*

L'existence d'une fonction f vérifiant les conditions $f\,'=f$ et $f(0)=1$ est admise. On la note $\exp$.
Démontrons son unicité.

Pour cela démontrons tout d'abord que pour tout réel x, on a $\exp(x)\neq 0$ et $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$

Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\exp(x)\times\exp(-x)$

Montrons que $g(x)=1$:

$x\longmapsto\exp(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a : $[\exp(-x)]'=-1\times\exp'(-x)=-\exp(-x)$

g est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$g'(x)=[\exp(x)]'\times[\exp(-x)]+[\exp(x)]\times[\exp(-x)]'=\exp(x)\times\exp(-x)+\exp(x)\times[-\exp(-x)]=0$$

On en déduit que la fonction g est constante sur $\mathbb{R}$.
On a $g(0)=\exp(0)\times\exp(-0)=\exp(0)\times\exp(0)=1\times1=1$.
Puisque g est constante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $g(x)=1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
c'est-à-dire que $\exp(x)\times\exp(-x)=1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
Ainsi $\exp(x)\neq 0$ et $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Considérons une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f\,'=f$ et $f(0)=1$

$\exp(x)$ étant différent de 0 pour tout réel x, on peut considérer la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=\dfrac{f(x)}{\exp(x)}$

Montrons que $h(x)=1$:

h est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :
$$h'(x)=\frac{f\,'(x)\times\exp(x)-f(x)\times(\exp(x))'}{(\exp(x))^2}=\frac{f(x)\times\exp(x)-f(x)\times\exp(x)}{(\exp(x))^2}=0$$

h est donc une fonction constante sur $\mathbb{R}$.
D'autre part, on a $h(0)=\dfrac{f(0)}{\exp(0)}=\dfrac{1}{1}=1$
Donc pour tout réel x on a :
$$h(x)=1\Leftrightarrow\frac{f(x)}{\exp(x)}=1\Leftrightarrow f(x)=\exp(x)$$
On en déduit alors l'unicité de la fonction $\exp$.

2) PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES – NOTATION e^x

Propriété :

Pour tous réels x et y, on a :
$$\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$$

La fonction exponentielle est donc une fonction transformant une somme en un produit.

Preuve :

Soit y un nombre réel fixé, on a vu que $\exp(y)\neq 0$

Considérons la fonction g de la variable réelle x, définie par $g(x)=\dfrac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$

Montrons que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$x\longmapsto\exp(x+y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, on a : $[\exp(x+y)]'=(x+y)'\times\exp'(x+y)=1\times\exp(x+y)=\exp(x+y)$
D'autre part y étant considérée comme une constante, $\exp(y)$ est aussi une constante donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, on a :
$$g'(x)=\frac{(\exp(x+y))'}{\exp(y)}=\frac{\exp(x+y)}{\exp(y)}=g(x)$$
De plus on a $g(0)=\dfrac{\exp(0+y)}{\exp(y)}=1$

g est donc une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $g\,'=g$ et $g(0)=1$
g est donc la fonction exponentielle (puisqu'on a démontré l'unicité de la fonction vérifiant ces conditions)

On en déduit que pour tout réel x, $g(x)=\exp(x)$ c'est-à-dire $\dfrac{\exp(x+y)}{\exp(y)}=\exp(x)$

Ceci ayant été démontré quelque soit le réel y, on a justifié que :
Pour tous réels x et y, on a $\exp(x+y)=\exp(x)\times\exp(y)$

Remarque :

La fonction exponentielle est la seule fonction vérifiant :
- f est dérivable sur $\mathbb{R}$
- $f(0)=f'(0)=1$
- pour tous réels x et y, $f(x+y)=f(x)\times f(y)$

Se démontre en étudiant $g(x)=f(x+a)$.
On montre que $g'(x)=f'(x)f(a)$ *, puis* $g'(a)=f'(0)f'(a)=f'(a)$

Remarque :

En appliquant la relation précédente avec $y=x$, on obtient : $\exp(2x)=[\exp(x)]^2$
En appliquant de nouveau la relation avec $y=2x$, on obtient : $\exp(3x)=\exp(2x)\times\exp(x)=[\exp(x)]^3$
On peut alors démontrer (*par récurrence*) que pour tout entier naturel n, on a : $\exp(nx)=[\exp(x)]^n$
On en déduit en particulier que pour tout entier naturel n, on a : $\exp(n)=\exp(n\times 1)=[\exp(1)]^n$
Si on note e le nombre $\exp(1)$, alors pour tout entier naturel n, on a : $\exp(n)=e^n$ (*relation que l'on peut aussi vérifier pour un entier négatif*)

Notation :

On conviendra de noter pour tout réel x : $\exp(x)=e^x$ où $e=\exp(1)$
La fonction exponentielle est alors définie par :

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto e^x$$

Remarque :

Le nombre $e=\exp(1)$ a pour valeur approchée 2,718.
La notation e^2 a donc une double signification : soit le nombre e élevé au carré, soit le nombre $\exp(2)$. (*Ces deux nombres étant égaux*)
Par contre la notation e^π ne peut désigner que le nombre $\exp(\pi)$.

Propriétés

Pour tous réels a et b, on a :
- $e^{a+b}=e^a e^b$
  On peut généraliser cette propriété à plusieurs nombres.
- $e^b \neq 0$ et $e^{-b}=\dfrac{1}{e^b}$
- $e^{a-b}=\dfrac{e^a}{e^b}$
- Si n est un entier relatif : $e^{na}=(e^a)^n$

Preuve :

- Pour tous réels a et b, on peut écrire : $e^{a-b}=e^{a+(-b)}=e^a e^{-b}=\dfrac{e^a}{e^b}$
- Si n est un entier naturel, soit $P(n)$ la proposition $e^{na}=(e^a)^n$

  - Pour $n=0$, on a $e^{na}=e^0=1$ et $(e^a)^0=1$ donc $P(0)$ est vraie

  - Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier naturel fixé n. On a alors :

  $$e^{na}=(e^a)^n \Leftrightarrow e^{na}e^a=(e^a)^n e^a \Leftrightarrow e^{na+a}=(e^a)^{n+1} \Leftrightarrow e^{(n+1)a}=(e^a)^{n+1}$$

  On en déduit que $P(n+1)$ est vraie.

  - On a donc démontré par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$. Ainsi $e^{na}=(e^a)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
  - D'autre part $e^{-na}=\dfrac{1}{e^{na}}=\dfrac{1}{(e^a)^n}=(e^a)^{-n}$

  La propriété est donc vraie aussi pour les entiers négatifs.

  - On en déduit que $e^{na}=(e^a)^n$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$.

3) ÉTUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

Propriété :

La fonction exponentielle est définie, continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(e^x)'=e^x$

On sait que toute fonction dérivable est continue, donc la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.

Propriétés :

- $e^0=1$; $e^1=e$
- Pour tout réel x, $e^x>0$

Preuve :

On sait que $e^0=1$ donc $e^0>0$.
Raisonnons par l'absurde :
S'il existait un réel x tel que $e^x<0$, alors le théorème des valeurs intermédiaires (puisque la fonction exponentielle est continue) justifierait l'existence d'un réel b tel que $e^b=0$.
Or on a vu que pour tout réel b, $e^b\neq 0$.
Ainsi il n'existe aucun réel x tel que $e^x<0$. On en déduit que pour tout réel x, $e^x>0$.

Propriété :

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La fonction exponentielle croît très vite (par exemple : $e^{50} \approx 5 \times 10^{21}$)

Preuve :

On sait que $(e^x)' = e^x$ et on a vu que $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Dans le langage courant, on parle souvent de phénomènes à "croissance exponentielle" pour indiquer que la croissance de ces phénomènes est très rapide.

Conséquences :

Pour tous réels a et b

- $a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$
- $a < b \Leftrightarrow e^a < e^b$
- $a \leqslant b \Leftrightarrow e^a \leqslant e^b$
- $a > 0 \Leftrightarrow e^a > 1$
- $a < 0 \Leftrightarrow 0 < e^a < 1$

Propriétés :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Preuve : *exigible*

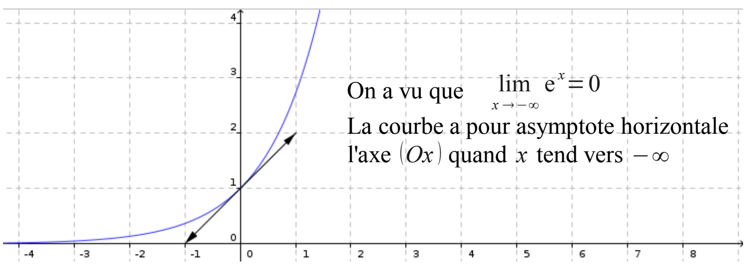
- La fonction exponentielle est strictement croissante, on a donc $e^1 > e^0$ donc $e > 1$.
  On en déduit que la suite (e^n) est une suite géométrique de raison e avec $e > 1$. Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n = +\infty$
  Soit $M > 0$.
  On a $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n = +\infty$, il existe donc n_0 tel que si $n > n_0$, $e^n \in]M ; +\infty[$
  Or la fonction exponentielle est croissante. Ainsi, si $x > n > n_0$ on a $e^x > e^n > M$ et $e^x \in]M ; +\infty[$
  Ce résultat est vrai pour tout $M > 0$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$

Tableau de variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
exp	0 ↗	$+\infty$

Représentation graphique :



Propriété :

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

Preuve : *exigible*

Par définition du nombre dérivé en 0, on peut écrire $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^0}{x - 0} = e^0 = 1$.

Propriétés :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x\, e^x = 0$

Au voisinage de l'infini, l'exponentielle de x l'emporte sur x.

Preuve :

- En étudiant la fonction $h : x \longmapsto e^x - 1 - x$, on montre que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1 + x$. On a donc en particulier $e^x \geqslant x$.
  En appliquant cette relation à $\dfrac{x}{2}$, on obtient $e^{\frac{x}{2}} \geqslant \dfrac{x}{2}$
  Puis en élevant au carré (les deux membres sont positifs), on obtient : $\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geqslant \dfrac{x^2}{4} \Leftrightarrow e^x \geqslant \dfrac{x^2}{4}$

Ainsi pour tout réel $x > 0$, on a $\dfrac{e^x}{x} \geqslant \dfrac{x}{4}$

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{4} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ (*d'après les théorèmes de comparaison en l'infini*)

- Sachant que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, on peut en déduire que $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x}}{-x} = +\infty$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{-x\, e^x} = +\infty$
  donc $\lim\limits_{x \to -\infty} -x\, e^x = 0^+$ et par conséquent $\lim\limits_{x \to -\infty} x\, e^x = 0^-$. Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} x\, e^x = 0$

Propriété :

La fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0\,;+\infty[$. C'est-à-dire que pour tout $k \in]0\,;+\infty[$, l'équation $e^x = k$ a une solution unique dans $\mathbb{R}$.

Cette solution est notée $\ln k$.

Preuve :
La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.
Ainsi, pour tout $k \in]0\,;+\infty[$, l'équation $e^x = k$ a une solution unique dans $\mathbb{R}$.

$e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que si $k \leqslant 0$, l'équation $e^x = k$ n'a pas de solution.

4) DÉRIVÉE DE $x \longmapsto e^{u(x)}$

Propriété :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction $x \longmapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$, on a : $$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)\, e^{u(x)}$$

Immédiat en utilisant, la dérivée de $x \longmapsto f(u(x))$

Remarque :
En exercices, on étudiera plus particulièrement les fonctions du type $x \longmapsto \exp(-kx)$ et $x \longmapsto \exp(-k\, x^2)$.
Ces fonctions sont utilisées dans de nombreux domaines.