

FONCTION EXPONENTIELLE

1) DÉFINITION

Propriété et définition :

Il existe une unique fonction f , définie et dérivable sur \mathbb{R} , telle que :
 $f' = f$ et $f(0) = 1$

Cette fonction, notée \exp , est appelée **fonction exponentielle**.

Preuve : l'existence est admise – l'unicité est exigible

L'existence d'une fonction f vérifiant les conditions $f' = f$ et $f(0) = 1$ est admise. On la note \exp .
Démontrons son unicité.

Pour cela démontrons tout d'abord que pour tout réel x , on a $\exp(x) \neq 0$ et $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

Considérons la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \exp(x) \times \exp(-x)$

Montrons que $g(x)=1$:

$x \mapsto \exp(-x)$ est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , on a : $[\exp(-x)]' = -1 \times \exp'(-x) = -\exp(-x)$

g est le produit de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} , donc g est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g'(x) = [\exp(x)]' \times [\exp(-x)] + [\exp(x)] \times [\exp(-x)]' = \exp(x) \times \exp(-x) + \exp(x) \times [-\exp(-x)] = 0$$

On en déduit que la fonction g est constante sur \mathbb{R} .

On a $g(0) = \exp(0) \times \exp(-0) = \exp(0) \times \exp(0) = 1 \times 1 = 1$.

Puisque g est constante sur \mathbb{R} , on en déduit que $g(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
c'est-à-dire que $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi $\exp(x) \neq 0$ et $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Considérons une fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} , telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$

$\exp(x)$ étant différent de 0 pour tout réel x , on peut considérer la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = \frac{f(x)}{\exp(x)}$

Montrons que $h(x)=1$:

h est le quotient de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} , donc h est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$h'(x) = \frac{f'(x) \times \exp(x) - f(x) \times (\exp(x))'}{(\exp(x))^2} = \frac{f(x) \times \exp(x) - f(x) \times \exp(x)}{(\exp(x))^2} = 0$$

h est donc une fonction constante sur \mathbb{R} .

D'autre part, on a $h(0) = \frac{f(0)}{\exp(0)} = \frac{1}{1} = 1$

Donc pour tout réel x on a :

$$h(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\exp(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = \exp(x)$$

On en déduit alors l'unicité de la fonction \exp .

2) PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES – NOTATION e^x

Propriété :

Pour tous réels x et y , on a :

$$\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

La fonction exponentielle est donc une fonction transformant une somme en un produit.

Preuve : non exigible

Soit y un nombre réel fixé, on a vu que $\exp(y) \neq 0$

Considérons la fonction g de la variable réelle x , définie par $g(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$

Montrons que g est dérivable sur \mathbb{R} .

$x \mapsto \exp(x+y)$ est dérivable sur \mathbb{R} , et pour tout réel x , on a : $[\exp(x+y)]' = (x+y)' \times \exp'(x+y) = 1 \times \exp(x+y) = \exp(x+y)$

D'autre part y étant considérée comme une constante, $\exp(y)$ est aussi une constante donc g est dérivable sur \mathbb{R} , et pour tout réel x , on a :

$$g'(x) = \frac{[\exp(x+y)]'}{\exp(y)} = \frac{\exp(x+y)}{\exp(y)} = g(x)$$

De plus on a $g(0) = \frac{\exp(0+y)}{\exp(y)} = 1$

g est donc une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} , telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$

g est donc la fonction exponentielle (puisque on a démontré l'unicité de la fonction vérifiant ces conditions)

On en déduit que pour tout réel x , $g(x) = \exp(x)$ c'est-à-dire $\frac{\exp(x+y)}{\exp(y)} = \exp(x)$

Ceci ayant été démontré quelque soit le réel y , on a justifié que :

Pour tous réels x et y , on a $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$

Remarque :

La fonction exponentielle est la seule fonction vérifiant :

- f est dérivable sur \mathbb{R}
- $f'(0) = f'(0) = 1$
- pour tous réels x et y , $f(x+y) = f(x) \times f(y)$

Se démontre en étudiant $g(x) = f(x+a)$.

On montre que $g'(x) = f'(x)f(a)$, puis $g'(a) = f'(0)f'(a) = f'(a)$

Remarque :

En appliquant la relation précédente avec $y=x$, on obtient : $\exp(2x) = [\exp(x)]^2$

En appliquant de nouveau la relation avec $y=2x$, on obtient : $\exp(3x) = \exp(2x) \times \exp(x) = [\exp(x)]^3$

On peut alors démontrer (*par récurrence*) que pour tout entier naturel n , on a : $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$

On en déduit en particulier que pour tout entier naturel n , on a : $\exp(n) = \exp(n \times 1) = [\exp(1)]^n$

Si on note e le nombre $\exp(1)$, alors pour tout entier naturel n , on a : $\exp(n) = e^n$ (*relation que l'on peut aussi vérifier pour un entier négatif*)

Notation :

On conviendra de noter pour tout réel x : $\exp(x) = e^x$ où $e = \exp(1)$

La fonction exponentielle est alors définie par :

$$\begin{array}{c} \exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{array}$$

Remarque :

Le nombre $e = \exp(1)$ a pour valeur approchée 2,718.

La notation e^2 a donc une double signification : soit le nombre e élevé au carré, soit le nombre $\exp(2)$. (*Ces deux nombres étant égaux*)

Par contre la notation e^π ne peut désigner que le nombre $\exp(\pi)$.

Propriétés

Pour tous réels a et b , on a :

- $e^{a+b} = e^a e^b$
On peut généraliser cette propriété à plusieurs nombres.
- $e^b \neq 0$ et $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$
- $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
- Si n est un entier relatif : $e^{na} = (e^a)^n$

Preuve : non exigible

- Pour tous réels a et b , on peut écrire : $e^{a-b} = e^{a+(-b)} = e^a e^{-b} = \frac{e^a}{e^b}$

- Si n est un entier naturel, soit $P(n)$ la proposition $e^{na} = (e^a)^n$

- Pour $n=0$, on a $e^{na} = e^0 = 1$ et $(e^a)^0 = 1$ donc $P(0)$ est vraie

- Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier naturel fixé n . On a alors :

$$e^{na} = (e^a)^n \Leftrightarrow e^{na} e^a = (e^a)^n e^a \Leftrightarrow e^{na+a} = (e^a)^{n+1} \Leftrightarrow e^{(n+1)a} = (e^a)^{n+1}$$

On en déduit que $P(n+1)$ est vraie.

- On a donc démontré par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $e^{na} = (e^a)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$- D'autre part \quad e^{-na} = \frac{1}{e^{na}} = \frac{1}{(e^a)^n} = (e^a)^{-n}$$

La propriété est donc vraie aussi pour les entiers négatifs.

- On en déduit que $e^{na} = (e^a)^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

3) ÉTUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

Propriété :

La fonction exponentielle est définie, continue, dérivable sur \mathbb{R} et $(e^x)' = e^x$

On sait que toute fonction dérivable est continue, donc la fonction exponentielle est continue sur \mathbb{R} .

Propriétés :

- $e^0 = 1$; $e^1 = e$
- Pour tout réel x , $e^x > 0$

Preuve : non exigible

On sait que $e^0 = 1$ donc $e^0 > 0$.

Raisonnons par l'absurde :

S'il existait un réel x tel que $e^x < 0$, alors le théorème des valeurs intermédiaires (puisque la fonction exponentielle est continue) justifierait l'existence d'un réel b tel que $e^b = 0$.

Or on a vu que pour tout réel b , $e^b \neq 0$.

Ainsi il n'existe aucun réel x tel que $e^x < 0$. On en déduit que pour tout réel x , $e^x > 0$.

Propriété :

La fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} .

La fonction exponentielle croît très vite
(par exemple : $e^{50} \approx 5 \times 10^{21}$)

Preuve :

On sait que $(e^x)' = e^x$ et on a vu que $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Donc la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Dans le langage courant, on parle souvent de phénomènes à "croissance exponentielle," pour indiquer que la croissance de ces phénomènes est très rapide.

Conséquences :

Pour tous réels a et b

- $a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$
- $a < b \Leftrightarrow e^a < e^b$
- $a \leq b \Leftrightarrow e^a \leq e^b$
- $a > 0 \Leftrightarrow e^a > 1$
- $a < 0 \Leftrightarrow 0 < e^a < 1$

Propriétés :

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

Preuve : exigible

- La fonction exponentielle est strictement croissante, on a donc $e^1 > e^0$ donc $e > 1$.

On en déduit que la suite (e^n) est une suite géométrique de raison e avec $e > 1$. Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$
Soit $M > 0$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$, il existe donc n_0 tel que si $n > n_0$, $e^n \in]M ; +\infty[$

Or la fonction exponentielle est croissante. Ainsi, si $x > n > n_0$ on a $e^x > e^n > M$ et $e^x \in]M ; +\infty[$

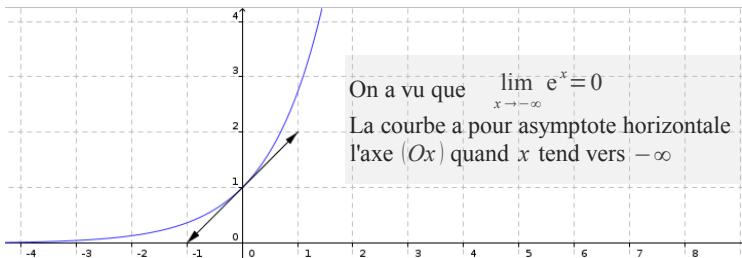
Ce résultat est vrai pour tout $M > 0$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

Tableau de variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
exp	0	$\rightarrow +\infty$

Représentation graphique :



Propriété :

• $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Preuve : exigible

Par définition du nombre dérivé en 0, on peut écrire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = e^0 = 1$.

Propriétés :

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$

Au voisinage de l'infini, l'exponentielle de x l'emporte sur x .

Preuve : non exigible

- En étudiant la fonction $h : x \mapsto e^x - 1 - x$, on montre que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$. On a donc en particulier $e^x \geq x$.

En appliquant cette relation à $\frac{x}{2}$, on obtient $e^{\frac{x}{2}} \geq \frac{x}{2}$

Puis en élévant au carré (les deux membres sont positifs), on obtient : $(e^{\frac{x}{2}})^2 \geq \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow e^x \geq \frac{x^2}{4}$

Ainsi pour tout réel $x > 0$, on a $\frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{4}$

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (d'après les théorèmes de comparaison en l'infini)

- Sachant que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, on peut en déduire que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{-x} = +\infty$ c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x e^x} = +\infty$
donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x e^x = 0^+$ et par conséquent $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^-$. Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$

Propriété : *en plus ...*

La fonction exponentielle est une bijection de \mathbb{R} sur $]0 ; +\infty[$.

C'est-à-dire que pour tout $k \in]0 ; +\infty[$, l'équation $e^x = k$ a une solution unique dans \mathbb{R} .

Cette solution est notée $\ln k$.

Preuve : *non exigible*

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} .

De plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

Ainsi, pour tout $k \in]0 ; +\infty[$, l'équation $e^x = k$ a une solution unique dans \mathbb{R} .

$e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que si $k \leq 0$, l'équation $e^x = k$ n'a pas de solution.

4) DÉRIVÉE DE $x \mapsto e^{u(x)}$

Propriété :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

La fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I , et pour tout $x \in I$, on a :

$$(e^{u(x)})' = u'(x) e^{u(x)}$$

Immédiat en utilisant, la dérivée de $x \mapsto f(u(x))$

Remarque :

En exercices, on étudiera plus particulièrement les fonctions du type $x \mapsto \exp(-kx)$ et $x \mapsto \exp(-kx^2)$.

Ces fonctions sont utilisées dans de nombreux domaines.