

FONCTION EXPONENTIELLE

1) DÉFINITION

Propriété et définition :

Il existe une unique fonction f , définie et dérivable sur \mathbb{R} , telle que :
 $f' = f$ et $f(0) = 1$

Cette fonction, notée \exp , est appelée **fonction exponentielle**.

Preuve : l'existence est admise – l'unicité est exigible

L'existence d'une fonction f vérifiant les conditions $f' = f$ et $f(0) = 1$ est admise. On la note \exp .
Démontrons son unicité.

Pour cela démontrons tout d'abord que pour tout réel x , on a $\exp(x) \neq 0$ et $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

Considérons la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \exp(x) \times \exp(-x)$

Montrons que $g(x) = 1$:

Considérons une fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} , telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$

$\exp(x)$ étant différent de 0 pour tout réel x , on peut considérer la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = \frac{f(x)}{\exp(x)}$

Montrons que $h(x) = 1$:

2) PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES – NOTATION e^x

Propriété :

Pour tous réels x et y , on a :

La fonction exponentielle est donc une fonction transformant une somme en un produit.

Preuve :

Soit y un nombre réel fixé, on a vu que $\exp(y) \neq 0$

Considérons la fonction g de la variable réelle x , définie par $g(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$

Montrons que g est dérivable sur \mathbb{R} .

$x \mapsto \exp(x+y)$ est dérivable sur \mathbb{R} , et pour tout réel x , on a : $[\exp(x+y)]' = (x+y)' \times \exp'(x+y) = 1 \times \exp(x+y) = \exp(x+y)$

D'autre part y étant considérée comme une constante, $\exp(y)$ est aussi une constante donc g est dérivable sur \mathbb{R} , et pour tout réel x , on a :

$$g'(x) = \frac{[\exp(x+y)]'}{\exp(y)} = \frac{\exp(x+y)}{\exp(y)} = g(x)$$

De plus on a $g(0) = \frac{\exp(0+y)}{\exp(y)} = 1$

g est donc une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} , telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$

g est donc la fonction exponentielle (puisque l'on a démontré l'unicité de la fonction vérifiant ces conditions)

On en déduit que pour tout réel x , $g(x) = \exp(x)$ c'est-à-dire $\frac{\exp(x+y)}{\exp(y)} = \exp(x)$

Ceci ayant été démontré quelque soit le réel y , on a justifié que :

Pour tous réels x et y , on a $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$

Remarque :

La fonction exponentielle est la seule fonction vérifiant :

- f est dérivable sur \mathbb{R}
- $f(0) = f'(0) = 1$
- pour tous réels x et y , $f(x+y) = f(x) \times f(y)$

Remarque :

En appliquant la relation précédente avec $y = x$, on obtient : $\exp(2x) = [\exp(x)]^2$

En appliquant de nouveau la relation avec $y = 2x$, on obtient : $\exp(3x) = \exp(2x) \times \exp(x) = [\exp(x)]^3$

On peut alors démontrer (*par récurrence*) que pour tout entier naturel n , on a : $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$

On en déduit en particulier que pour tout entier naturel n , on a : $\exp(n) = \exp(n \times 1) = [\exp(1)]^n$

Si on note e le nombre $\exp(1)$, alors pour tout entier naturel n , on a : $\exp(n) = e^n$ (*relation que l'on peut aussi vérifier pour un entier négatif*)

Notation :

On conviendra de noter pour tout réel x : $\exp(x) = e^x$ où $e = \exp(1)$

La fonction exponentielle est alors définie par :

Remarque :

Le nombre $e = \exp(1)$ a pour valeur approchée 2,718.

La notation e^2 a donc une double signification : soit le nombre e élevé au carré, soit le nombre $\exp(2)$. (*Ces deux nombres étant égaux*)

Par contre la notation e^π ne peut désigner que le nombre $\exp(\pi)$.

Propriétés

Pour tous réels a et b , on a :

- $e^{a+b} = e^a e^b$
On peut généraliser cette propriété à plusieurs nombres.
- $e^b \neq 0$ et $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$
- $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
- Si n est un entier relatif : $e^{na} = (e^a)^n$

Preuve :

• Pour tous réels a et b , on peut écrire : $e^{a-b} = e^{a+(-b)} = e^a e^{-b} = \frac{e^a}{e^b}$

• Si n est un entier naturel, soit $P(n)$ la proposition $e^{na} = (e^a)^n$

- Pour $n = 0$, on a

- Supposons que $P(n)$ est vraie pour un entier naturel fixé n . On a alors :

⋮

- On a donc démontré par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $e^{na} = (e^a)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

- D'autre part

La propriété est donc vraie aussi pour les entiers négatifs.

- On en déduit que $e^{na} = (e^a)^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

3) ÉTUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

Propriété :

La fonction exponentielle est définie, continue, dérivable sur \mathbb{R} et $(e^x)' = e^x$

On sait que toute fonction dérivable est continue, donc la fonction exponentielle est continue sur \mathbb{R} .

Propriétés :

-
-

Preuve :

On sait que $e^0 = 1$ donc $e^0 > 0$.

Raisonnons par l'absurde :

S'il existait un réel x tel que $e^x < 0$, alors le théorème des valeurs intermédiaires (puisque la fonction exponentielle est continue) justifierait l'existence d'un réel b tel que $e^b = 0$.

Or on a vu que pour tout réel b , $e^b \neq 0$.

Ainsi il n'existe aucun réel x tel que $e^x < 0$. On en déduit que pour tout réel x , $e^x > 0$.

Propriété :

La fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} .

La fonction exponentielle croît très vite
(par exemple : $e^{50} \approx 5 \times 10^{21}$)

Preuve :

Dans le langage courant, on parle souvent de phénomènes à "croissance exponentielle", pour indiquer que la croissance de ces phénomènes est très rapide.

Conséquences :

Pour tous réels a et b

- $a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$
- $a < b \Leftrightarrow e^a < e^b$
- $a \leq b \Leftrightarrow e^a \leq e^b$
- $a > 0 \Leftrightarrow e^a > 1$
- $a < 0 \Leftrightarrow 0 < e^a < 1$

Propriétés :

-
-

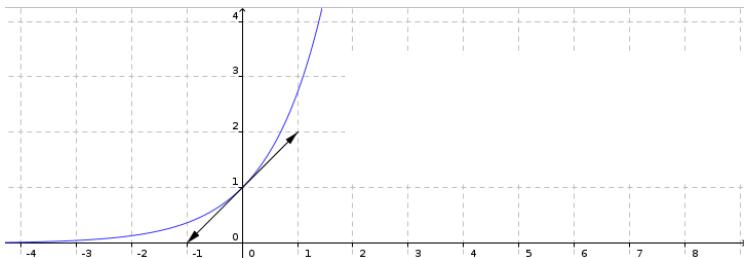
Preuve : exigible

-

Tableau de variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
exp	-	-

Représentation graphique :



Propriété :

-

Preuve : exigible

Propriétés :

-
-

Au voisinage de l'infini, l'exponentielle de x l'emporte sur x .

Preuve :

- En étudiant la fonction $h : x \mapsto e^x - 1 - x$, on montre que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$. On a donc en particulier $e^x \geq x$.

En appliquant cette relation à $\frac{x}{2}$, on obtient $e^{\frac{x}{2}} \geq \frac{x}{2}$

Puis en élévant au carré (les deux membres sont positifs), on obtient : $(e^{\frac{x}{2}})^2 \geq \frac{x^2}{4} \Leftrightarrow e^x \geq \frac{x^2}{4}$

Ainsi pour tout réel $x > 0$, on a $\frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{4}$

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (d'après les théorèmes de comparaison en l'infini)

• Sachant que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, on peut en déduire que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{-x} = +\infty$ c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x e^x} = +\infty$
donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x e^x = 0^+$ et par conséquent $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^-$. Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$

Propriété :

La fonction exponentielle est une bijection de \mathbb{R} sur $]0 ; +\infty[$.

C'est-à-dire que pour tout $k \in]0 ; +\infty[$, l'équation $e^x = k$ a une solution unique dans \mathbb{R} .

Cette solution est notée $\ln k$.

Preuve :

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur \mathbb{R} .

De plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

Ainsi, pour tout $k \in]0 ; +\infty[$, l'équation $e^x = k$ a une solution unique dans \mathbb{R} .

$e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que si $k \leq 0$, l'équation $e^x = k$ n'a pas de solution.

4) DÉRIVÉE DE $x \mapsto e^{u(x)}$

Propriété :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

La fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I , et pour tout $x \in I$, on a :

Immédiat en utilisant, la dérivée de $x \mapsto f(u(x))$

Remarque :

En exercices, on étudiera plus particulièrement les fonctions du type $x \mapsto \exp(-kx)$ et $x \mapsto \exp(-kx^2)$.

Ces fonctions sont utilisées dans de nombreux domaines.