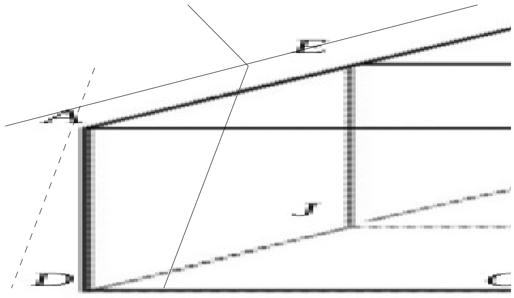
DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

Avant tout, rappelons une propriété fondamentale :

Tout théorème de géométrie plane s'applique dans n'importe quel plan de l'espace.

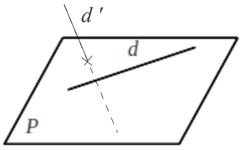
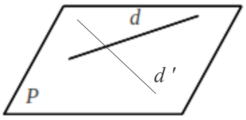
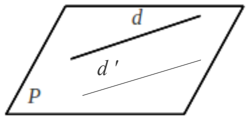
Les exemples de ce chapitre se réfèrent à la figure ci-contre

$ABCDEFIJ$ est un cube $EGHJKLMN$ est un parallélépipède rectangle tel que $HM = CI$ et $JH = 2\,JI$



1) POSITIONS RELATIVES DE DROITES ET DE PLANS

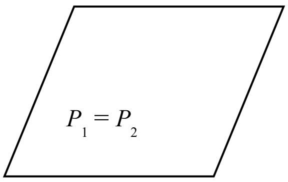
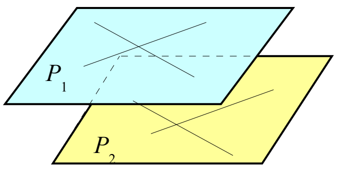
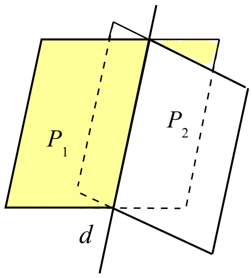
A) POSITIONS RELATIVES DE DEUX DROITES

d et d' sont non coplanaires	d et d' sont coplanaires	
Aucun plan ne les contient toutes les deux.	Elles sont sécantes.	Elles sont parallèles.
		

Exemple :

- Les droites (AB) et (HN) sont
- Les droites (AB) et (JH) sont
- Les droites (AL) et (KF) sont

B) POSITIONS RELATIVES DE DEUX PLANS

P_1 et P_2 sont parallèles		P_1 et P_2 sont sécants
P_1 et P_2 confondus 	 P_1 et P_2 sont strictement parallèles	

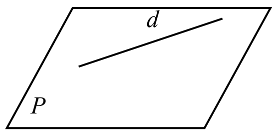
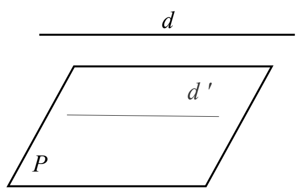
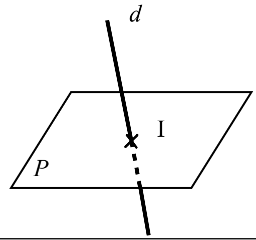
Propriété d'incidence :

Si deux plans sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les intersections sont des droites parallèles.

Exemple :

- Les plans (EKL) et (EGJ) sont
- Les plans (EKL) et (JNM) sont
- Le plan $(CDEF)$ coupe les plans parallèles $(AEJD)$ et $(BFIC)$ suivant

C) POSITIONS RELATIVES D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

d et P sont parallèles		d et P sont sécants
 d est contenue dans P	 d est strictement parallèle à P	

Exemple :

2) VECTEURS DE L'ESPACE

Comme dans le plan, à tout couple de points A et B de l'espace, on associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

- Lorsque $A \neq B$, **la direction** de $\overrightarrow{AB}$ est celle de la droite (AB), **le sens** de $\overrightarrow{AB}$ est le sens de A vers B et la **longueur** ou **norme** de $\overrightarrow{AB}$, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$, est la distance AB.
  Lorsque $A = B$, $\overrightarrow{AA}$ est le vecteur nul, noté $\vec{0}$.
- On désigne souvent les vecteurs par une seule lettre, par exemple $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ …
- Pour tout point O de l'espace et pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

A) VECTEURS ÉGAUX

Chacune des propriétés suivantes signifie que les vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux :

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont même direction, même sens et même norme.
- $ABCD$ est un parallélogramme, c'est à dire $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu.
  (Si A, B, C et D sont alignés, on dit que $ABCD$ est un parallélogramme aplati)

B) RÈGLES DE CALCUL

Les règles de calcul sur les vecteurs de l'espace sont analogues aux règles de calcul sur les vecteurs du plan.

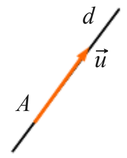
- **RELATION DE CHASLES :**
  Exemple : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} =$ $\qquad$ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI} =$ $\qquad$ $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{KL} =$
- **RÈGLE DU PARALLELOGRAMME :**
  Exemple : $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DJ} =$ $\qquad$ $\overrightarrow{JN} + \overrightarrow{JH} =$ $\qquad$ $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{DA} =$
- **OPPOSÉ D'UN VECTEUR :**
  Exemple : $\overrightarrow{AB} =$
- **MULTIPLICATION D'UN VECTEUR PAR UN RÉEL :**
  Pour tous réels a et b, et pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :
  $a(\vec{u}+\vec{v}) = a\,\vec{u} + a\,\vec{v}$, $(a+b)\,\vec{u} = a\,\vec{u} + b\,\vec{u}$, $a(b\,\vec{u}) = (ab)\,\vec{u}$, $a\,\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow a = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$ etc ...

C) VECTEURS COLINÉAIRES

- Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui ont la même direction sont dits colinéaires.
  Par convention le vecteur nul est colinéaire à tout autre vecteur.
- Dire que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire qu'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\,\vec{v}$
- Dire que les points A, B et C (distincts) sont alignés revient à dire qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC}$.

3) INTERPRÉTATION VECTORIELLE DES DROITES ET PLANS DE L'ESPACE

A) DROITES



Définition :

Soit d une droite. On appelle **vecteurs directeurs** de d les vecteurs, non nuls, définis par deux points de d.

Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul.
$(A\,;\vec{u})$ représente la droite qui passe par A et de direction, la direction de $\vec{u}$.

Remarques :

- La droite $(A\,;\vec{u})$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est à dire tels qu'il existe un réel k vérifiant $\overrightarrow{AM}=k\,\vec{u}$.
- Dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, c'est à dire qu'il existe $k\in\mathbb{R}^*$ tel que $\overrightarrow{AB}=k\,\overrightarrow{CD}$.

Conséquence :

- Deux droites sont parallèles si, et seulement si, leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

B) PLANS

PLAN DÉTERMINÉ PAR TROIS POINTS

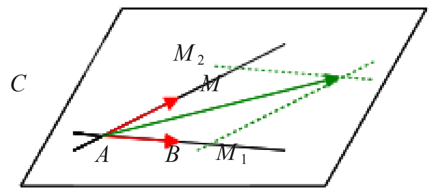
Propriété :

Soit A, B et C trois points non alignés.
Le plan (ABC) est l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe des réels x et y vérifiant $\overrightarrow{AM}=x\,\overrightarrow{AB}+y\,\overrightarrow{AC}$

Preuve :

On pose $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

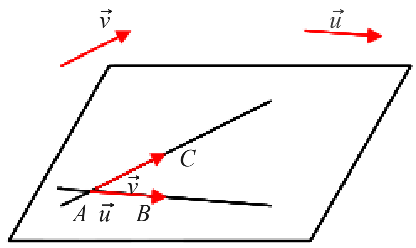
- Le repère $(A\,;\vec{u},\vec{v})$ est un repère de (ABC) . Ainsi, pour tout point M du plan, il existe un unique couple de réels $(x\,;\,y)$ tels que $\overrightarrow{AM}=x\,\vec{u}+y\,\vec{v}$
- Réciproquement, soit M un point de l'espace tel qu'il existe deux réels x et y vérifiant $\overrightarrow{AM}=x\,\vec{u}+y\,\vec{v}$.
  On note M_1 et M_2 les points définis par $\overrightarrow{AM_1}=x\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM_2}=y\,\overrightarrow{AC}$
  L'égalité $\overrightarrow{AM_1}=x\,\overrightarrow{AB}$ prouve que M_1 est sur (AB) , donc dans le plan (ABC). De même M_2 est sur (AC), donc dans le plan (ABC) .
  D'autre part on a $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AM_1}+\overrightarrow{AM_2}$, donc AM_1MM_2 est un parallélogramme.
  Les sommets A, M_1 et M_2 sont dans le plan (ABC), il en est donc de même pour le quatrième sommet M .



On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont **des vecteurs directeurs** du plan (ABC) .

PLAN DÉFINI PAR UN POINT ET UN COUPLE DE VECTEURS NON COLINEAIRES

Un point A et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires déterminent un unique plan : le plan (ABC) où $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$.
On note $(A\,;\vec{u},\vec{v})$ ce plan
$(A\,;\vec{u},\vec{v})$ est l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe deux réels x et y vérifiant $\overrightarrow{AM}=x\,\vec{u}+y\,\vec{v}$.



On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **des vecteurs directeurs** du plan $(A\,;\vec{u},\vec{v})$ ou encore que le plan $(A\,;\vec{u},\vec{v})$ est dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Remarque :

Si $\vec{u}\,'$ est un vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$, et $\vec{v}\,'$ un vecteur non nul colinéaire à $\vec{v}$, alors le plan $(A\,;\vec{u}\,',\vec{v}\,')$ est le même que le plan $(A\,;\vec{u},\vec{v})$.

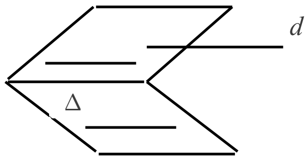
Exemple :

Conséquences :

-
-

C) THÉORÈME DU TOIT

Théorème :



Preuve : *exigible*

Soit $\vec{w}$ un vecteur directeur de d.
On note Δ l'intersection de P et P'.
Soit A un point de Δ . C'est aussi un point de P et de P'.

Le plan P est l'ensemble des points M de l'espace tels que
Le plan P' est l'ensemble des points M de l'espace tels que

Soit M un point de Δ.
$M \in P$, il existe donc deux réels x et y tels que
$M \in P'$, il existe donc deux réels x' et y' tels que

4) DÉCOMPOSITION DE VECTEURS

A) VECTEURS COPLANAIRES

Définition :

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, …., de l'espace sont dits coplanaires lorsqu'un point O quelconque et les points A, B , C, … , définis par $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{w}$, … , sont coplanaires.

Cette définition ne dépend pas du point O choisi.

Remarques :

- Deux vecteurs sont toujours coplanaires.
- Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors quel que soit le vecteur $\vec{w}$, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

Exemple : Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{HM}$, $\overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont coplanaires.

Propriété :

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Dire que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires revient à dire qu'il existe des réels a et b tels que

Preuve :

Soit O un point de l'espace. On considère les points A, B et C tels que $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{OC}=\vec{w}$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, les points O, A et B ne sont pas alignés et déterminent donc un plan, le plan (OAB).
Par définition, dire que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires revient à dire $C \in (OAB)$ … ce qui revient à dire qu'il existe des réels a et b tels que $\overrightarrow{OC}=a\,\overrightarrow{OA}+b\,\overrightarrow{OB}$.

Remarque :
Si trois vecteurs sont non coplanaires, alors aucun des trois ne peut se décomposer en fonction des deux autres.

B) VECTEURS NON COPLANAIRES

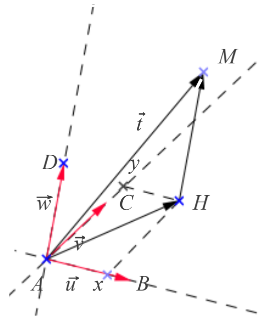
Propriété :

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace.
Pour tout vecteur $\vec{t}$ de l'espace, il existe un unique triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ de réels tels que :

Preuve :

Existence :
Soit A , B , C , D et M des points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{w}=\overrightarrow{AD}$ et $\vec{t}=\overrightarrow{AM}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires, sinon $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ seraient coplanaires.
Ainsi A , B et C définissent un plan dont $(A , \vec{u} , \vec{v})$ est un repère.
La parallèle à la droite (AD) passant par M, dirigée par $\vec{w}$, qui n'est pas un vecteur du plan (ABC), puisque $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires, est sécante à ce plan en un point H.
$\overrightarrow{HM}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires, donc $\overrightarrow{HM}=z\,\vec{w}$, où z est un réel, et H appartient au plan (ABC),
donc $\overrightarrow{AH}=x\,\vec{u}+y\,\vec{v}$ (x et y réels)
Comme $\vec{t}=\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HM}$, on obtient l'existence d'un triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ de réels tels que
$\vec{t}=x\,\vec{u}+y\,\vec{v}+z\,\vec{w}$



Unicité :
On suppose que l'on a deux écritures : $\vec{t}=x\,\vec{u}+y\,\vec{v}+z\,\vec{w}=x\,'\,\vec{u}+y\,'\,\vec{v}+z\,'\,\vec{w}$
On a alors $(x-x\,')\vec{u}+(y-y\,')\vec{v}+(z-z\,')\vec{w}=\vec{0}$.
Supposons que l'une des trois différences n'est pas nulle, par exemple $(z-z\,')\neq 0$.
On obtient :
$$\vec{w}=\frac{x-x\,'}{(z-z\,')}\vec{u}+\frac{y-y\,'}{(z-z\,')}\vec{v}$$

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ seraient alors coplanaires … ce qui n'est pas possible.
On en déduit que $z=z\,'$ et de la même façon que $x=x\,'$ et $y=y\,'$.

Remarque :
On dit que l'on a décomposé le vecteur $\vec{t}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

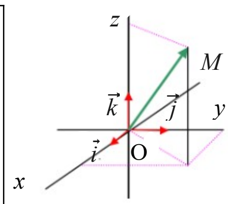
5) REPÈRES DE L'ESPACE

Propriété et définitions :

Soit O un point et $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace.
A tout point M de l'espace, on peut associer un unique triplet de réels $(x\,;\,y\,;\,z)$ tel que :

$$\overrightarrow{OM}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$$

On dit que $(x\,;\,y\,;\,z)$ sont les **coordonnées** du point M dans le repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$ ou que x, y et z sont respectivement **l'abscisse** , **l'ordonnée** et **la cote** du point M.



Exemple :

Dans le repère $(J\,;\overrightarrow{JD}, \overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JE})$, on a

Les propriétés et les règles de calcul vues dans le plan pour les coordonnées de vecteurs et de points se prolongent dans l'espace en ajoutant simplement une troisième coordonnée.

Propriété :

Dans un repère donné de l'espace, soit $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\,'\begin{pmatrix}a\,'\\b\,'\\c\,'\end{pmatrix}$ deux vecteurs , $A(x\,;\,y\,;\,z)$ et $B(x\,'\,;\,y\,'\,;\,z\,')$ deux points.

- Pour tout réel k , le vecteur $k\,\vec{u}$ a pour coordonnées
- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées
- Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées
- Le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées
- $\vec{u}=\vec{v}\ \Leftrightarrow$

6) REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE D'UNE DROITE DE L'ESPACE

Dans la suite du cours, l'espace est muni d'un repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$

Propriété :

Soit d la droite de l'espace passant par le point A de coordonnées $(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}\lambda\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$.

Un point M de coordonnées $(x\,;y\,;z)$ appartient à d si, et seulement si il existe un réel k tel que :

Preuve :

Remarque :

A chaque réel k correspond un unique point M de la droite.
Réciproquement, à chaque point M de la droite correspond un unique réel k tel que $\overrightarrow{AM}=k\,\vec{u}$.

Définition :

Soit d la droite de l'espace passant par le point A de coordonnées $(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}\lambda\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$.

$\begin{cases}x=x_A+k\,\lambda\\ y=y_A+k\,\beta\\ z=z_A+k\,\gamma\end{cases}$ ($k\in\mathbb{R}$) est **une représentation paramétrique** de la droite d .

Le paramètre k peut être remplacé par n'importe quelle autre lettre distincte de x, y et z .
On utilise souvent la lettre t.

Remarques :

- Si λ , β et γ sont trois réels non nuls simultanément, le système $\begin{cases}x=a+k\,\lambda\\ y=b+k\,\beta\\ z=c+k\,\gamma\end{cases}$ est une représentation paramétrique de la droite passant par

- Il n'y a pas unicité de la représentation paramétrique d'une droite de l'espace.

- Représentations paramétriques d'un segment et d'une demi-droite :
  Soit A et B deux points distincts de l'espace.
  En considérant le vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$, l'appartenance d'un point M au segment $[AB]$ ou bien à la demi-droite $[AB)$ s'obtient en adaptant l'énoncé de la conclusion ci-dessus :

  - pour le segment, il suffit de remplacer dans le système : « $k\in\mathbb{R}$ » par

  - pour la demi-droite $[AB)$, il suffit de remplacer dans le système : « $k\in\mathbb{R}$ » par