Nombre dérivé d'une fonction en « un point » : quelques rappels

Ex 1 : ***Vrai ou faux : restituer les notions du cours***

1) Pour savoir si une fonction est dérivable en un « point » a , on regarde la limite de $\dfrac{f(a)-f(a+h)}{h}$ lorsque h tend vers 0.

2) Pour savoir si une fonction est dérivable en un « point » a , on regarde la limite de $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ lorsque x tend vers a .

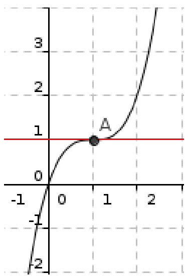
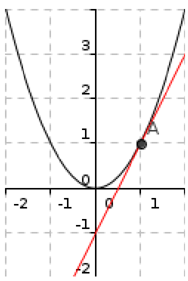
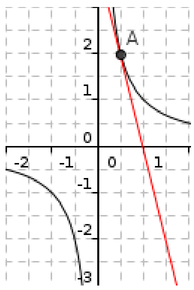
3) Il est possible qu'une fonction ne soit pas dérivable en un point a .

4) Si une fonction f est dérivable en a , la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a admet pour équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

5) Si une fonction f est dérivable en a , le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est égal à la limite d'un taux d'accroissement de f .

Ex 2 : ***Déterminer $f'(a)$ à l'aide d'un graphique.***

Dans chacun des cas ci-dessous, on considère la courbe représentative C_f d'une fonction f , et A un point de C_f d'abscisse a .
Déterminer $f'(a)$.

1)	2)	3)
		

Ex 3 : ***Calculer le nombre dérivé***

Déterminer si le nombre dérivé de la fonction f en a existe et, si c'est le cas, calculer $f'(a)$.

1) $f:x \longmapsto x\sqrt{x}$, $a=0$ 2) $f:x \longmapsto |x-3|$, $a=3$

3) $f:x \longmapsto x^2+x+1$, $a=-1$ 4) $f:x \longmapsto \sqrt{1-x}$, $a=1$

5) $f:x \longmapsto x^2\sqrt{x}$, $a=0$ 6) $f:x \longmapsto |x-5|$, $a=3$

Formules de dérivation : quelques rappels

Ex 4 :

D représente un intervalle ou une réunion d'intervalles disjoints.
Soit u et v deux fonctions dérivables sur D et k un réel.

	Fonction f	**Fonction dérivée f'**	**Dérivable sur :**
1)	$f:x \longmapsto k$ $(k\in\mathbb{R})$		
2)	$f:x \longmapsto x$		
3)	$f:x \longmapsto \sqrt{x}$		
4)	$f:x \longmapsto x^n$ $(n\in\mathbb{Z}^*)$		
5)	ku		
6)	$u+v$		
7)	uv		
Si pour tout réel a de D , $v(a)\neq 0$			
8)	$\dfrac{1}{v}$		
9)	$\dfrac{u}{v}$		

Compléter :

Toute fonction polynôme est dérivable sur ...

Toute fonction rationnelle est dérivable sur ...

Dérivées successives

Ex 5 : ***Dérivées successives***

1) Dans chacun des cas ci-dessous, démontrer que la fonction proposée est dérivable sur I, et calculer sa dérivée . Étudier alors si la fonction dérivée admet une dérivée seconde sur I, et si c'est le cas, calculer cette dérivée seconde.

a) $f:x \longmapsto x^4-3x^3+2$ sur $\mathbb{R}$ b) $g:x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$

c) $h(x)=\sqrt{x}$ sur $[1;3]$

2) Lorsque c'est possible, on peut continuer la dérivation . On obtient alors les dérivées successives de la fonction f : dérivée troisième $f^{(3)}$, dérivée quatrième $f^{(4)}$ …
Calculer, lorsque c'est possible, les dérivées troisième et quatrième des fonctions vues précédemment.

Calculs de dérivées

Ex 6 :

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes, sans déterminer l'ensemble de dérivabilité.
Vérifier les calculs avec la calculatrice ou avec Xcas.

1) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+5x-4$
et g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=f(-2x+5)$

2) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(-3x+5)^4$

3) f définie sur $]-\infty;3[$ par $f(x)=\dfrac{5x-8}{-x+3}$

4) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+x+1}$

5) f définie sur $\left]-\infty;\dfrac{2}{3}\right[$ par $f(x)=\sqrt{-3x+2}$

6) f définie sur $\left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$ par $f(x)=\sqrt{(1+3x)^3}$

7) f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=(1+\sqrt{x})^{10}$

Limites et dérivation

Ex 7 :

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{4x+4}-4}{x-3}$ 2) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(2+x)^5-1}{x+1}$

Tangente à la courbe

Ex 8 :

Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$ au point de la courbe d'abscisse 2.

Ex 9 : ***Tangentes parallèles à une droite***

Soit f la fonction définie sur ℝ -{-1} par $f : x \longmapsto \dfrac{2x}{x+1}$ et C sa courbe courbe représentative.

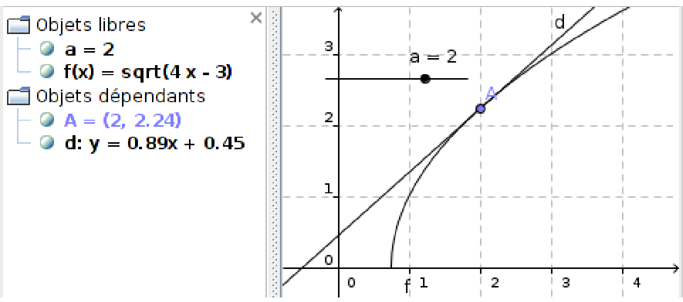
1) Démontrer qu'il existe exactement deux tangentes à la courbe C qui sont parallèles à la droite d'équation $4x-2y+3=0$

2) Déterminer les équations de ces deux tangentes.

Ex 10 : ***Trouver une tangente vérifiant une condition***

On considère la fonction f définie sur $\left]\dfrac{3}{4};+\infty\right[$ par $f(x)=\sqrt{4x-3}$ et C_f sa courbe représentative.

Le but de l'exercice est de démontrer que C_f admet une unique tangente passant par le point $O(0;0)$ et de déterminer le point A de C_f où la tangente à C_f passe par O .



1) Déterminer, à l'aide d'un logiciel adapté, l'abscisse du point A qui semble répondre au problème.

2) Démontrer qu'un point A de C_f d'abscisse a répond au problème posé si et seulement si $f(a)=af'(a)$

3) Répondre au problème posé.

Ex 11 : ***Tangente commune***

Soit $f : x \longmapsto \sqrt{x^2-3x+3}+1$ et $g : x \longmapsto -\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{3}{2}x$ deux fonctions définies sur ℝ .

1) Justifier que les fonctions f et g sont dérivables sur ℝ et calculer les dérivées de ces deux fonctions.

2) Avec un traceur de courbe, faire une conjecture à propos des courbes représentant ces fonctions au point d'abscisse 2.

3) Démontrer la conjecture.

Exercices divers

Ex 12 : ***Dérivabilité en 0***

On considère la fonction f définie sur $[0;1[$ par $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2}{1-x}}$.

1) Justifier que f est dérivable sur $[0;1[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0;1[$.

2) Avec un traceur de courbe, faire une conjecture à propos de la dérivabilité de f en 0.

3) Démontrer la conjecture.

Ex 13 : ***Montrer une inégalité***

Utiliser la dérivation pour montrer l'inégalité suivante :

$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad , \quad \sqrt{x} \leqslant \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$

Ex 14 : ***Calculs de dérivées et fonctions composées***

Soit la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

1) Calculer $f'(x)$

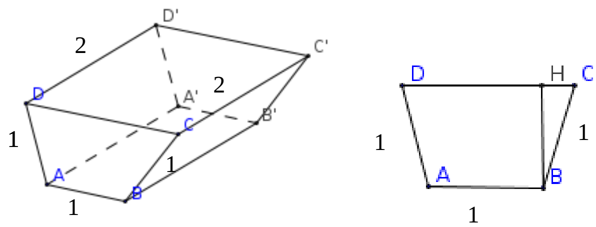
2) En déduire les calculs de $g'(x)$, $h'(x)$ et $k'(x)$ où :

$g(x)=f(4x-1)$, $h(x)=\dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ et $k(x)=\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-1}}$

Préciser, dans chaque cas, un intervalle I où le calcul est possible.

Ex 15 : ***Optimisation***

Une benne à la forme d'un prisme droit dont la base est un trapèze isocèle $ABCD$.



La longueur du côté CD est variable.
Les autres dimensions sont fixes.
On désigne par x la longueur CH où H est le projeté orthogonal de B sur (CD) .
On se propose de déterminer x de façon que la benne ait un volume maximal.

1) Calculer en fonction de x l'aire $S(x)$ du trapèze isocèle ABCD, puis le volume $V(x)$ de la benne.

On considère la fonction f définie sur $[0;1[$ par $f(x)=(x+1)\sqrt{1-x^2}$

2) Démontrer que $f'(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$f'(x)=\dfrac{1-x-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

3) Étudier le sens de variation de f . (sans les limites)

4) Exprimer $V(x)$ à l'aide de $f(x)$.

5) Pour quelle valeur de x le volume de la benne est-il maximal ?

6) Quel est alors le volume de la benne et quelle est la mesure en degrés de l'angle $\widehat{CBH}$?

EN ROUTE VERS LE BAC

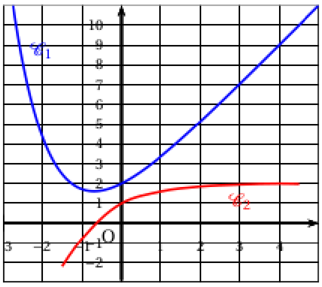
Ex 16 : *Baccalauréat S Pondichéry 8 avril 2014 – ex 4 – partie A*

Courbes représentatives de f et de f'

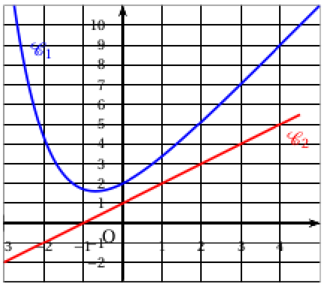
f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. f' est la fonction dérivée de la fonction f.
Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on nomme $\mathscr{C}_1$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathscr{C}_2$ la courbe représentative de la fonction f'.
Le point A de coordonnées $(0; 2)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_1$.
Le point B de coordonnées $(0; 1)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_2$.

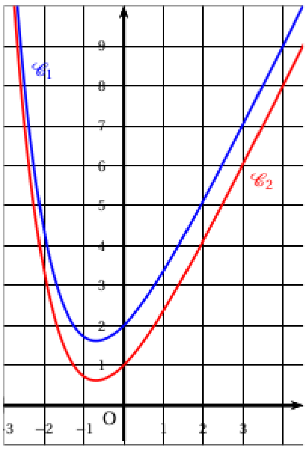
1. Dans les trois situations ci-dessous, on a dessiné la courbe représentative $\mathscr{C}_1$ de la fonction f. Sur l'une d'entre elles, la courbe $\mathscr{C}_2$ de la fonction dérivée f' est tracée convenablement. Laquelle ? Expliquer le choix effectué.

Situation 1



Situation 2 (**$\mathscr{C}_2$ est une droite**)





2. Déterminer l'équation réduite de la droite Δ tangente à la courbe $\mathscr{C}_1$ en A.

Ex 17 : *Baccalauréat S Amérique du Sud - 21 novembre 2013 – ex 1 partie B*

Suites de fonctions

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions g_n et h_n définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \quad \text{et} \quad h_n(x) = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}.$$

1. Vérifier que, pour tout réel x : $(1-x)g_n(x) = 1 - x^{n+1}$.

   On obtient alors, pour tout réel $x \neq 1$: $g_n(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

2. Comparer les fonctions h_n et g'_n, g'_n étant la dérivée de la fonction g_n.

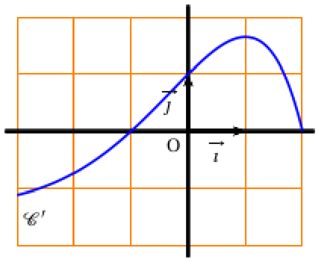
   En déduire que, pour tout réel $x \neq 1$: $h_n(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$.

Ex 18 : *Baccalauréat S Métropole 21 juin 2012 – ex 1*

Courbe représentative de f'

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-3 ; 2]$.
On dispose des informations suivantes :

- $f(0) = -1$.
- la dérivée f' de la fonction f admet la courbe représentative $\mathscr{C}'$ ci-dessous.



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3, -1]$, $f'(x) \leqslant 0$.
2. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1 ; 2]$.
3. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3 ; 2]$, $f(x) \geqslant -1$.
4. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.
   La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées $(1 ; 0)$.