CALCULS DE DÉRIVÉES : COMPLÉMENTS

1) DÉRIVÉES SUCCESSIVES

Définition :

Soit f est une fonction dérivable sur un intervalle I.
Sa fonction dérivée $f\,'$ s'appelle **dérivée première** (ou d'ordre 1) de f.
Lorsque $f\,'$ est dérivable sur I, sa fonction dérivée est notée $f\,''$. $f\,''$ est appelée **dérivée seconde** (ou dérivée d'ordre 2) de f.
Par itération, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on définit **la fonction dérivée *n*-ième** (ou d'ordre n) comme étant la fonction dérivée de la fonction d'ordre $n-1$.

Notation : $f^{(1)} = f\,'$ et pour tout $n \geqslant 2$, $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

Exemple :

$f : x \longmapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f\,'(x) = 3x^2$ puis … $f\,''(x) = 6x$, $f^{(3)}(x) = 6$ et $f^{(4)}(x) = 0$

2) DÉRIVÉE DE $\sqrt{u}$

Propriété :

Soit u une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I. Alors la fonction f définie sur I par $f(x) = \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$, on a :

$$f\,'(x) = \frac{u\,'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

Preuve : *non exigible*

Soit $a \in I$. Pour tout réel h non nul tel que $a+h \in I$, on a :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\sqrt{u(a+h)}-\sqrt{u(a)}}{h} = \frac{\sqrt{u(a+h)}-\sqrt{u(a)}}{u(a+h)-u(a)} \times \frac{u(a+h)-u(a)}{h}$$

- Étude de $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}$

  u est dérivable en a. On a donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(a+h)-u(a)}{h} = u\,'(a)$

- Étude de $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{u(a+h)}-\sqrt{u(a)}}{u(a+h)-u(a)}$

  On pose $X = u(a+h)$

  u est dérivable en a, u est donc continue en a, ce qui donne : $\lim\limits_{h \to 0} X = \lim\limits_{h \to 0} u(a+h) = u(a)$

  On a également $u(a) \in]0\,;+\infty[$ et $x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, d'où :

  $$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{u(a+h)}-\sqrt{u(a)}}{u(a+h)-u(a)} = \lim_{X \to u(a)} \frac{\sqrt{X}-\sqrt{u(a)}}{X-u(a)} = \frac{1}{2\sqrt{u(a)}}$$

- On en déduit que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = u\,'(a)\dfrac{1}{2\sqrt{u(a)}} = \dfrac{u\,'(a)}{2\sqrt{u(a)}}$

  Ainsi f est dérivable en a et $f\,'(a) = \dfrac{u\,'(a)}{2\sqrt{u(a)}}$

Exemple : Déterminer sur $]0\,;+\infty[$ la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2x^3}$

$u : x \longmapsto 2x^3$ est strictement positive et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour $x \in \mathbb{R}$, on a : $u\,'(x) = 6x^2$

On en déduit que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x > 0$, on a : $f\,'(x) = \dfrac{u\,'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{6x^2}{2\sqrt{2x^3}} = \dfrac{3x^2}{\sqrt{2x^3}}$

Remarques :

- Cette propriété et les propriétés suivantes sont proposées sur des intervalles . Elles restent vraies sur des réunions d'intervalles.
- Les propriétés qui suivent (admises) se démontrent en suivant le même modèle.

3) DÉRIVÉE DE u^n (où n est un entier relatif non nul)

Propriété :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et n un entier naturel non nul . Alors la fonction f définie sur I par $f(x)=[u(x)]^n$ est dérivable sur I , et pour tout $x\in I$, on a :

$$f'(x)=n\,u'(x)[u(x)]^{n-1}$$

Remarque : Cas où $n<0$ et u ne s'annule en aucun réel de I :

On a $f(x)=[u(x)]^n=\dfrac{1}{[u(x)]^{-n}}$

Puisque $-n>0$, on peut appliquer la formule de la dérivée de l'inverse d'une fonction et on obtient : $f'(x)=-\dfrac{([u(x)]^{-n})'}{([u(x)]^{-n})^2}$

Or $([u(x)]^{-n})'=-n\,u'(x)[u(x)]^{-n-1}$ donc $f'(x)=-\dfrac{-n\,u'(x)\,[u(x)]^{-n-1}}{([u(x)]^{-n})^2}=n\,u'(x)\,[u(x)]^{n-1}$

On obtient également $f'(x)=n\,u'(x)[u(x)]^{n-1}$

Exemple : Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(3x^2+1)^5$

$u:x\longmapsto 3x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x\in\mathbb{R}$, on a : $u'(x)=6x$
On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $f'(x)=5\,u'(x)\,(u(x))^4=5\times 6x(3x^2+1)^4=30x(3x^2+1)^4$

4) DÉRIVÉE DE $f:x\longmapsto g(ax+b)$

Propriété :

Soit a et b deux réels et g une fonction dérivable sur un intervalle I.
Pour tout réel x, tel que $ax+b\in I$, la fonction f définie par $f(x)=g(ax+b)$ est dérivable , et on a :

$$f'(x)=ag'(ax+b)$$

Exemple : Déterminer sur $\left]\dfrac{5}{2};+\infty\right[$ la dérivée de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1}{2x-5}$

Pour tout $x>\dfrac{5}{2}$, on pose $f(x)=g(2x-5)$ où $g:x\longmapsto\dfrac{1}{x}$

g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x>0$, on a : $g'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

Pour tout $x>\dfrac{5}{2}$, $2x-5>0$. On en déduit que f est dérivable sur $\left]\dfrac{5}{2};+\infty\right[$ et pour tout $x>\dfrac{5}{2}$, on a : $f'(x)=2g'(2x-5)=-\dfrac{2}{(2x-5)^2}$

5) CAS GÉNÉRAL

Propriété :

Soit g une fonction dérivable sur un intervalle J et u est une fonction dérivable sur un intervalle I, telle que pour tout x de I, $u(x)$ appartient à J.
Alors la fonction f définie par $f(x)=g(u(x))$ est dérivable sur I et pour tout x de I, on a :

$$f'(x)=u'(x)\times g'(u(x))$$

Exemple : Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, on pose : $f(x)=g(u(x))$ où $g:x\longmapsto\sin x$ et $u:x\longmapsto\dfrac{1}{x}$
La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $g'(x)=\cos x$
La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, on a : $u'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$
(Pour tout $x\neq 0$, on a bien sûr $u(x)\in\mathbb{R}$ ... Dans la pratique, quand la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$, cette vérification n'est pas nécessaire)

On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x\neq 0$, on a : $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$