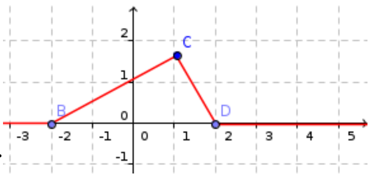
Lois à densité : généralités

Ex 1 : ***Vrai ou faux***

Une fonction densité f définie sur I :
1) est monotone sur I
2) ne prend que des valeurs positives ou nulles
3) a une primitive sur I égale à 1
4) a une intégrale qui vérifie $\int_I f(t)\mathrm{d}t=1$

Ex 2 : ***Reconnaître une densité***

Soit f une fonction et C_f sa représentation graphique représentée ci-contre :



1) Le point C a pour abscisse 1 . A quelle condition portant sur l'ordonnée de C la fonction f est-elle la fonction densité d'une variable aléatoire X ?

2) Calculer $P(0\leqslant X\leqslant 2)$

Ex 3 : ***Reconnaître une densité***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$.

1) Tracer sur la calculatrice la courbe représentative de f .
2) Montrer que f est une fonction densité d'une variable aléatoire X.
3) Calculer $P(-3\leqslant X\leqslant -2)$.

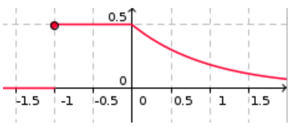
Ex 4 : ***Reconnaître une densité***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}6x(1-x) \text{ si } x\in[0;1]\\ 0 \text{ si } x\notin[0;1]\end{cases}$

1) Tracer sur la calculatrice la courbe représentative de f .
2) Montrer que f est une fonction densité d'une variable aléatoire X.
3) Calculer $P\left(\frac{1}{4}\leqslant X\leqslant\frac{1}{2}\right)$.

Ex 5 : ***Reconnaître une densité***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<-1\\ \frac{1}{2} \text{ si } -1\leq x\leq 0\\ \frac{1}{2}e^{-x} \text{ si } x>0\end{cases}$,



1) Montrer que f est une fonction densité d'une variable aléatoire X.

2) Calculer $P\left(-\frac{1}{2}<X<3\right)$

Loi uniforme

Ex 6 : ***QCM***

La variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[-1;4]$.

1) Elle admet pour densité la fonction f définie par $f(x)=\begin{cases}a \text{ si } x\in[-1;4\\ 0 \text{ si } x\notin[-1;4\end{cases}$

avec : a) $a=1$ b) $a=4$ c) $a=5$ d) $a=\frac{1}{5}$

2) a) $E(X)=0$ b) $E(X)=\frac{1}{2}$ c) $E(X)=\frac{3}{2}$ d) $E(X)=1$

Ex 7 : ***Choisir un nombre au hasard***

On choisit un nombre au hasard dans l'intervalle $[10;80]$.
1) Déterminer la probabilité que ce nombre soit compris entre 30 et 60.
2) Déterminer la probabilité que ce nombre soit inférieur à 30.
3) Déterminer la probabilité que ce nombre soit supérieur à 70.

Ex 8 : ***Choisir un nombre au hasard***

On choisit un nombre dans l'intervalle $]0;1[$.

1) Quelle est la probabilité que ce nombre appartienne à l'intervalle $[0,2;0,3]$?
2) Quelle est la probabilité que ce nombre soit supérieur à 0,6 ?
3) Quelle est la probabilité que le premier chiffre soit supérieur ou égal à 7 et que le second chiffre après la virgule soit 2 ?

Ex 9 : ***Tableur : simulation d'une loi uniforme***

1) Écrire la formule simulant une loi uniforme $U(3;8)$ avec la fonction ALEA() d'un tableur.
2) Écrire la formule donnant la fréquence de valeurs comprises entre 4 et 5 pour une simulation réalisée avec 500 cellules.
3) Ouvrir une feuille de calcul et appliquer les formules des questions 1 et 2. Quelle est la fréquence obtenue ?

Ex 10 : ***Temps d'attente***

On suppose que le temps d'attente à un arrêt de bus (en min) , suit la loi uniforme sur $[0;30]$.
1) Déterminer la probabilité que la durée d'attente d'une personne prise au hasard soit comprise entre 10 et 15 min.
2) Déterminer la probabilité que la durée d'attente d'une personne prise au hasard soit inférieure à 10 min.
3) Quel est le temps moyen d'attente à cet arrêt de bus ?
4) Sachant qu'une personne attend le bus depuis 15 min, quelle est la probabilité qu'elle attende au moins encore 5 minutes ?

Ex 11 : Y=X+*a*

Soit la variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[3;4]$.
1) Rappeler la fonction densité f de X .
2) On considère une nouvelle variable aléatoire $Y=X+2$.
a) Quelles sont les valeurs prises par Y ?
b) Calculer $P(Y\leqslant x)$ pour $x\leqslant 5$, pour $x\geqslant 6$ et pour $x\in[5;6]$
c) Quelle loi suit la variable aléatoire Y ?
3) Comparer les espérances de X et de Y.

Ex 12 : Y=*a* X

Soit la variable aléatoire X suivant la loi uniforme sur $[0;6]$.
1) Rappeler la fonction densité f de X
2) On considère une nouvelle variable aléatoire $Y=3X$.
a) Quelles sont les valeurs prises par Y ?
b) Calculer $P(Y\leqslant x)$ pour $x\leqslant 0$, pour $x\geqslant 18$ et pour $x\in[0;18]$
c) Quelle loi suit la variable aléatoire Y ?
3) Comparer les espérances de X et de Y.

Ex 13 : ***Sur la route du lycée – temps de parcours – indépendance***

Amine habite à 1km du lycée Lyautey . Soit X la variable aléatoire égale à la durée (en min) du trajet qu'Amine emprunte pour se rendre au lycée.
X suit la loi uniforme sur [15;20].
1) a) Donner la fonction densité de la loi suivie par X.
b) Quel est le temps moyen du trajet ?
c) Quelle est la probabilité qu'il mette strictement moins de 18 min ?
2) On suppose que pour chaque jour de la semaine, la durée d'un trajet est indépendante de celle des autres trajets.
Sur une semaine Amine se rend à son lycée tous les jours du lundi au samedi.
Quelle est la probabilité qu'au moins un trajet ait duré strictement plus de 18 minutes ?

Ex 14 : ***Sur la route du lycée – perte de livre – indépendance***

Samia, un peu étourdie, effectue un trajet de longueur L pour se rendre au lycée Lyautey . Au cours de ce trajet, elle perd successivement son livre de math et son livre de philo.
Ceci se produit de façon indépendante pour chaque livre et de façon équiprobable en tout point du parcours.
1) Soit X_P et X_M les variables aléatoires donnant (resp) la distance du point de départ au point de chute du livre de philo et du livre de math .
a) Donner le domaine de définition de X_P et X_M .
b) Déterminer les lois suivies par X_P et X_M , puis leur espérance.
2) Au lycée, Samia se rend compte de la disparition de ses livres . Elle refait le trajet en sens inverse.
Quelle est la probabilité qu'ayant effectué en sens inverse la distance Δ , Samia ait retrouvé :
a) ses deux livres ?
b) au moins un de ses deux livres ?

Loi exponentielle

Ex 15 : ***Reconnaître la loi exponentielle***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \lambda e^{-2x} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

1) Pour quelle valeur de λ la fonction f est-elle densité de la loi exponentielle ?
2) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X suivant la loi définie précédemment.
3) Exprimer suivant les valeurs du réels x la probabilité de $F(x)=P(X\leqslant x)$.
Définition : F s'appelle la fonction de répartition de X.
4) Vérifier que $P(1\leqslant X\leqslant 2)=F(2)-F(1)$

Ex 16 : ***Médiane et premier quartile***

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle d'espérance 20.
1) Déterminer la fonction densité de X.
2) Déterminer le réel m , tel que $P(X\leqslant m)=\frac{1}{2}$
Définition : m est la médiane de la distribution de X.
3) Déterminer le réel q tel que $P(X\leqslant q)=\frac{1}{4}$.
Définition : q est le premier quartile de la distribution de X.

Ex 17 : ***Durée de vie***

La durée de vie (en jours) d'un composant électronique est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,001.
1) On prélève un composant au hasard. Calculer la probabilité que le composant ait une durée de vie :
a) comprise entre 200 et 300 jours,
b) inférieure à 400 jours,
c) supérieure à 500 jours.
2) Quelle est la durée de vie moyenne de ces composants électroniques ?

Ex 18 : Y=X+*a*

Soit une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ .
1) Rappeler l'ensemble de définition de la fonction densité f de X
2) On considère une nouvelle variable aléatoire $Y=X+2$.
a) Quelles sont les valeurs prises par Y ?
b) Calculer $P(Y\leqslant x)$ pour $x<2$ et pour $x\geqslant 2$.
c) La variable aléatoire Y suit-elle une loi exponentielle ?
3) Quelle transformation a-t-on entre la densité de X et celle de Y ?
4) Comparer les espérances de X et de Y.

Ex 19 : Y=*a* X

Soit une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda>0$) .
1) Rappeler l'ensemble de définition de la fonction densité f de X .
2) On considère une nouvelle variable aléatoire $Y=aX$ (avec $a>0$).
a) Quelles sont les valeurs prises par Y ?
b) Calculer $P(Y\leqslant x)$ pour $x<0$ et pour $x\geqslant 0$.
c) Quelle loi suit la variable aléatoire Y ?
3) Comparer les espérances de X et de Y.

Ex 20 : ***Avec des suites***

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda=4$. Soit $n\in\mathbb{N}$.
1) Calculer $a_0=P(0\leqslant X\leqslant 1)$, $a_1=P(1\leqslant X\leqslant 2)$ et $a_n=P(n\leqslant X\leqslant n+1)$.
2) Soit F la fonction de répartition de X, définie par $F(x)=P(X\leqslant x)$.
Exprimer a_n en fonction de $F(n)$ et de $F(n+1)$.
Quelle est la nature de la suite (a_n) ?

Ex 21 : ***Durée de vie et mort sans vieillissement***

La durée de vie d'un écran LCD, exprimée en années, est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ . On admet qu'en moyenne, un écran a une durée de vie de 8 ans.
1) Déterminer la valeur de λ .
2) Déterminer la probabilité qu'un écran ait une durée de vie supérieure à 8 ans, puis la probabilité qu'un écran ait une durée de vie supérieure à 10 ans. Comparer ces deux résultats.
3) Si un tel écran fonctionne depuis 2 ans, quelle est la probabilité pour qu'il ait une durée de vie totale supérieure à 10 ans ?

Ex 22 : ***Radioactivité***

On considère un noyau radioactif . On admet que sa durée de vie (en années) est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .
1) a) Rappeler la densité de probabilité f de X.
b) Soit $t\in\mathbb{R}^+$ et $h\in\mathbb{R}^+$. Calculer $P(t\leqslant X\leqslant t+h)$.
c) On sait que ce noyau radioactif n'est pas désintégré à l'instant t .
Montrer que la probabilité que ce noyau ne se désintègre pas entre les instants t et $t+h$ ne dépend pas de t .

2) La demi-vie d'un élément radioactif est la durée au bout de laquelle la moitié des noyaux initialement présents sont désintégrés, c'est à dire le nombre T tel que $P(X\leqslant T)=\frac{1}{2}$.

Exprimer en fonction de λ la demi-vie T d'un élément radioactif.

3) Un déchet a une courte durée de vie lorsque sa demi-vie est inférieure à 30 ans.
a) Déterminer un minorant de λ .
b) Ces déchets doivent être isolés de l'homme pendant la durée nécessaire pour que la probabilité qu'un noyau se désintègre soit supérieure à 99,9 %. Déterminer ce nombre minimal d'années.

4) Lors de la catastrophe de Tchernobyl en 1986, vingt radionucléides ont été disséminés, dont l'iode 131 , d'une demi-vie de 8 jours.

Des mesures effectuées actuellement devraient-elles mettre en évidence la présence d'iode 131 ?

D'autres lois

Ex 23 : ***Existence et calcul d'une espérance***

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \frac{2}{3}x & \text{si } 0\leq x\leq 1\\ \frac{2}{3}\frac{1}{x^2} & \text{si } x>1\end{cases}$

1) Tracer sur la calculatrice la courbe représentative de f .
2) Montrer que f est une fonction densité d'une variable aléatoire X.

3) Étudier $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^x t\,f(t)\,\mathrm{d}t$

4) X admet-elle une espérance ?

Ex 24 : ***La loi de Laplace***

Soit X une variable aléatoire définie sur $\mathbb{R}$ et admettant pour densité la fonction f , définie par $f(x)=a\,e^{-\lambda|x|}$, où $a\in\mathbb{R}_+^*$ et $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$.

1) Quelle relation existe-t-il entre a et λ pour que f soit une fonction densité ?
2) Tracer la courbe représentative de f pour $a=2$.
3) X admet-elle une espérance ? Si oui quelle est sa valeur ?

Loi normale centrée réduite

Ex 25 : ***Vrai ou faux***

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $N(0;1)$. Alors :
1) X peut prendre toutes les valeurs de $\mathbb{R}$

2) $E(X)=0$

3) $P(X\leqslant 0)=P(X\geqslant 0)=\frac{1}{2}$

4) La densité de X est la fonction f sur $\mathbb{R}$ définie par $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$

5) $V(X)=1$

6) Il existe deux réels positifs t tels que $P(X\leqslant t)=0,2$

7) C_f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

8) $P(-1\leqslant X\leqslant 1)=2P(0\leqslant X\leqslant 1)$

9) $P(1\leqslant X\leqslant 3)=P(2\leqslant X\leqslant 4)$

Ex 26 : ***Calculer une probabilité avec la calculatrice***

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $N(0;1)$.
A l'aide de la calculatrice, déterminer les probabilités suivantes.
Donner des arrondis à 10^{-4} près.

1) $P(X\leqslant 0,6)$ 2) $P(X\geqslant 0,6)$ 3) $P(-2,1\leqslant X\leqslant 0,48)$

4) $P(-1,96\leqslant X\leqslant 1,96)$ 5) $P(0\leqslant X\leqslant 1,96)$ 6) $P(-2,57\leqslant X\leqslant 2,57)$

Ex 27 : ***Déterminer u_α avec la calculatrice***

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $N(0;1)$.
1) À l'aide de considérations géométriques, vérifier que :
$P(-u_\alpha\leqslant X\leqslant u_\alpha)=2P(X\leqslant u_\alpha)-1$

2) À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur u_α telle que $P(-u_\alpha\leqslant X\leqslant u_\alpha)=1-\alpha$, en prenant $\alpha=0,01$, puis $\alpha=0,05$.
Donner des arrondis à 10^{-4} près.

Ex 28 : ***Surbooking - utilisation du théorème de Moivre-Laplace***

On considère un théâtre d'une contenance de 1200 places . On estime que la probabilité qu'un spectateur ayant réservé se désiste est de 0,1 et que les désistements se décident indépendamment les uns des autres.
La direction du théâtre souhaite déterminer le nombre maximum de réservations à accepter pour que la probabilité de pouvoir accueillir tous les spectateurs se présentant au guichet soit supérieure ou égale à 0,975.
On note n le nombre de réservations acceptées par le théâtre et X_n le nombre de spectateurs se présentant pour la présentation.
1) Donner la loi suivie par X_n , son espérance et sa variance.
2) En utilisant le théorème de Moivre-Laplace, montrer que n doit vérifier l'égalité suivante : $0,9n+0,588\sqrt{n}-1200\leqslant 0$
3) Que peut conclure la direction du théâtre ?

Loi normale $N(\mu,\sigma^2)$

Ex 29 : ***Vrai ou faux***

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $N(\mu,\sigma^2)$. Alors :
1) X peut prendre toutes les valeurs de $\mathbb{R}$.

2) La variable aléatoire $\frac{X-\mu}{\sigma^2}$ suit la loi $N(0;1)$.

3) La variable aléatoire $\frac{X-\mu}{\sigma}$ a pour espérance 0.

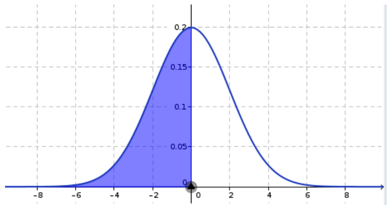
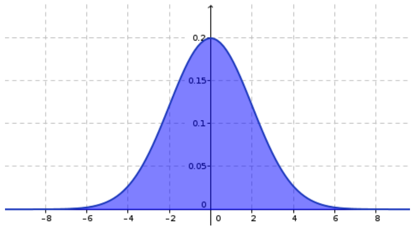
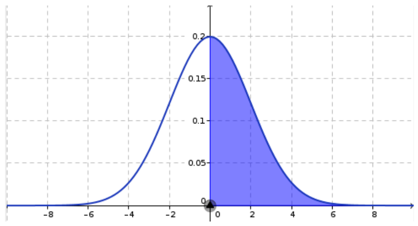
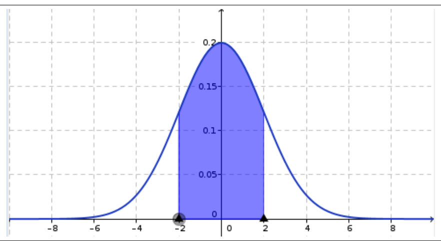
4) μ est l'espérance de X.

5) σ^2 est l'écart type de X .

6) La courbe représentative de la fonction densité de X est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Ex 30 : ***Interpréter la représentation graphique***

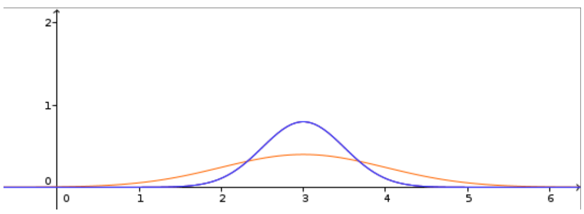
On considère la variable aléatoire qui suit la loi normale $N(0;4)$
Pour chacune des représentations ci-dessous, écrire la probabilité qui correspond à la zone coloriée, puis proposer sans utiliser de calculatrice une valeur approchée de cette probabilité.

Représentation	Probabilité	Valeur
		
		
		
		

Ex 31 : ***Interpréter la représentation graphique***

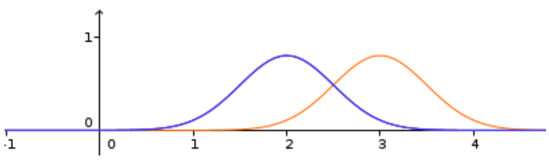
Voici deux densités de deux variables aléatoires X (en bleu) et Y (en orange)
Sans calcul, compléter le texte suivant avec les mots « égal(e) », « inférieur(e) » ou « supérieur(e) ».

a)



L'espérance de X est …...................... à l'espérance de Y .
L'écart type de X est …...................... à l'écart type de Y .

b)



L'espérance de X est …...................... à l'espérance de Y .
L'écart type de X est …...................... à l'écart type de Y .

Ex 32 : ***Calculer une probabilité avec la calculatrice***

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $N(80;25)$.
A l'aide de la calculatrice, déterminer les probabilités suivantes.
Donner des arrondis à 10^{-4} près.
Attention sur la calculatrice, il faut saisir l'espérance et l'écart type …

1) $P(X>80)$ 2) $P(X\leqslant 85)$ 3) $P(X\geqslant 75)$

4) $P(70\leqslant X\leqslant 72)$ 5) $P(88\leqslant X\leqslant 90)$ 6) $P(70\leqslant X\leqslant 90)$

Certains de ces résultats étaient-ils prévisibles ?

Ex 33 : ***Calculer b avec la calculatrice***

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $N(250;100)$.
A l'aide de la calculatrice, déterminer :

1) la valeur de b telle que $P(X\leqslant b)=0,95$

2) la valeur v_α telle que $P(-v_\alpha\leqslant X-250\leqslant v_\alpha)=1-\alpha$ (où $\alpha=0,01$)

Ex 34 : ***Déterminer les paramètres***

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $N(\mu,\sigma^2)$.
Les questions 1 et 2 sont indépendantes.
1) On sait que l'espérance de X vaut -10 et que $P(X<0)=0,5478$.
Déterminer l'écart type de X.

2) On sait que $P(15\leqslant X\leqslant 25)=0,7888$ et que $P(X\leqslant 25)=0,8944$.
Déterminer les paramètres de la loi.

Ex 35 : ***Application : avec des poules ...***

Un éleveur bio s'intéresse à la productivité de ses poules pondeuses . Notre éleveur très fort en mathématiques (dans une autre vie, il était prof de math et il s'est reconverti, inspiré par les exercices loufoques avec des éleveurs et des poules qu'il écrivait …) estime que le nombre d'oeufs par poule et par an est une variable aléatoire suivant la loi $N(250;25)$.

1) a) Calculer la probabilité qu'une de ses poules ponde :
a) au plus 220 œufs par an.
b) de 240 à 260 œufs par an.
c) au moins 280 œufs par an.

2) Afin de sélectionner les meilleures poules, l'éleveur souhaite comparer les productions de ses poules.
a) Quelle est la production maximale de 30 % de poules les moins productives de l'élevage ?
b) Quelle est la production minimale de 20 % de poules les plus productives de l'élevage ?

Ex 36 : ***Application : avec des clés USB ...***

La durée de vie d'une clé USB (en mois) suit une loi normale de moyenne et d'écart type inconnus.
Selon le fabriquant, 75 % des clés produites ont une durée de vie comprise entre 15 et 25 mois.
La garantie s'applique sur cette période en considérant que 5 % des clés de la production ont une durée de vie inférieure à 15 mois.

1) Déterminer la moyenne et l'écart type de la loi.

2) Quelle est la probabilité d'avoir un appareil dont la durée de vie soit comprise entre 25 et 30 mois ?

EN ROUTE VERS LE BAC

Ex 37 : ***Baccalauréat S Antilles-Guyane 22 juin 2015 - ex 2***

Loi exp – roc (espérance) – probabilités conditionnelles – événement indépendants - P(A ∪ B)

Partie A

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
On rappelle que, pour tout réel a strictement positif,

$$P(X \leqslant a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\,dt.$$

On se propose de calculer l'espérance mathématique de X, notée $E(X)$, et définie par

$$E(X) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\,dt.$$

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
On admet que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t) = -\left(t + \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$.

1. Soit x un nombre réel strictement positif. Vérifier que

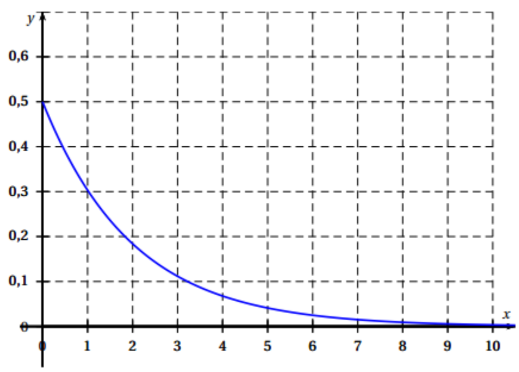
$$\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1\right).$$

2. En déduire que $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Partie B

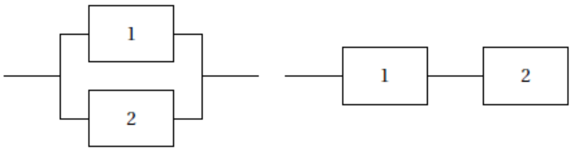
La durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique peut être modélisée par une variable aléatoire notée X suivant la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.
La courbe de la fonction densité associée est représentée en **annexe 2**.

1. Sur le graphique de l'annexe 2 (à rendre avec la copie) :
   - **a.** Représenter la probabilité $P(X \leqslant 1)$.
   - **b.** Indiquer où se lit directement la valeur de λ.
2. On suppose que $E(X) = 2$.
   - **a.** Que représente dans le cadre de l'exercice la valeur de l'espérance mathématique de la variable aléatoire X ?
   - **b.** Calculer la valeur de λ.
   - **c.** Calculer $P(X \leqslant 2)$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 0,01 près.
     Interpréter ce résultat.
   - **d.** Sachant que le composant a déjà fonctionné une année, quelle est la probabilité que sa durée de vie totale soit d'au moins trois années ? On donnera la valeur exacte.



Partie C

Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note D_1 l'évènement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note D_2 l'évènement « le composant 2 est défaillant avant un an ».
On suppose que les deux évènements D_1 et D_2 sont indépendants et que $P(D_1) = P(D_2) = 0,39$.
Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci-dessous :



Circuit en parallèle A Circuit en série B

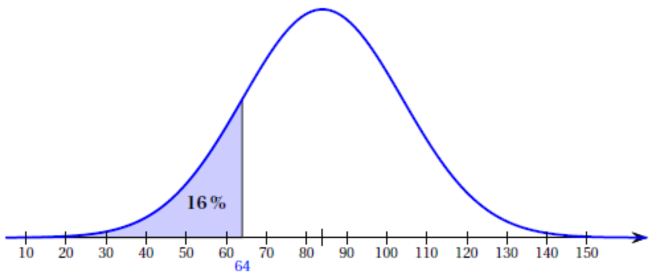
1. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.
2. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.*

Ex 38 : ***Baccalauréat S Pondichéry 17 avril 2015 - ex 3***

Loi normale – loi binomiale

Partie A Étude de la durée de vie d'un appareil électroménager

Des études statistiques ont permis de modéliser la durée de vie, en mois, d'un type de lave-vaisselle par une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ de moyenne $\mu = 84$ et d'écart-type σ. De plus, on a $P(X \leqslant 64) = 0,16$.
La représentation graphique de la fonction densité de probabilité de X est donnée ci-dessous.



1. **a.** En exploitant le graphique, déterminer $P(64 \leqslant X \leqslant 104)$.
   b. Quelle valeur approchée entière de σ peut-on proposer ?
2. On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \frac{X - 84}{\sigma}$.
   a. Quelle est la loi de probabilité suivie par Z ?
   b. Justifier que $P(X \leqslant 64) = P\left(Z \leqslant \frac{-20}{\sigma}\right)$.
   c. En déduire la valeur de σ, arrondie à 10^{-3}.
3. Dans cette question, on considère que $\sigma = 20,1$.
   Les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3}.
   a. Calculer la probabilité que la durée de vie du lave-vaisselle soit comprise entre 2 et 5 ans.
   b. Calculer la probabilité que le lave-vaisselle ait une durée de vie supérieure à 10 ans.

Partie B Étude de l'extension de garantie d'El'Ectro

Le lave-vaisselle est garanti gratuitement pendant les deux premières années.
L'entreprise El'Ectro propose à ses clients une extension de garantie de 3 ans supplémentaires.
Des études statistiques menées **sur les clients qui prennent l'extension de garantie** montrent que 11,5 % d'entre eux font jouer l'extension de garantie.

1. On choisit au hasard 12 clients parmi ceux ayant pris l'extension de garantie (on peut assimiler ce choix à un tirage au hasard avec remise vu le grand nombre de clients).
   a. Quelle est la probabilité qu'exactement 3 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Détailler la démarche en précisant la loi de probabilité utilisée. Arrondir à 10^{-3}.
   b. Quelle est la probabilité qu'au moins 6 de ces clients fassent jouer cette extension de garantie ? Arrondir à 10^{-3}.

2. L'offre d'extension de garantie est la suivante : pour 65 euros supplémentaires, El'Ectro remboursera au client la valeur initiale du lave-vaisselle, soit 399 euros, **si une panne irréparable survient entre le début de la troisième année et la fin de la cinquième année**. Le client ne peut pas faire jouer cette extension de garantie si la panne est réparable.
   On choisit au hasard un client parmi les clients ayant souscrit l'extension de garantie, et on note Y la variable aléatoire qui représente le gain algébrique en euros réalisé sur ce client par l'entreprise El'Ectro, grâce à l'extension de garantie.
   a. Justifier que Y prend les valeurs 65 et -334 puis donner la loi de probabilité de Y.
   b. Cette offre d'extension de garantie est-elle financièrement avantageuse pour l'entreprise ? Justifier.*

Ex 39 : *Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie mars 2016 - ex 1*

Probabilités conditionnelles – une probabilité en fonction d'une variable – étude de fonctions

Partie A

Une boite contient 200 médailles souvenir dont 50 sont argentées, les autres dorées.
Parmi les argentées 60 % représentent le château de Blois, 30 % le château de Langeais, les autres le château de Saumur.
Parmi les dorées 40 % représentent le château de Blois, les autres le château de Langeais.
On tire au hasard une médaille de la boite. Le tirage est considéré équiprobable et on note :

A l'évènement « la médaille tirée est argentée » ;
D l'évènement « la médaille tirée est dorée » ;
B l'évènement « la médaille tirée représente le château de Blois » ;
L l'évènement « la médaille tirée représente le château de Langeais » ;
S l'évènement « la médaille tirée représente le château de Saumur ».

1. Dans cette question, on donnera les résultats sous la forme d'une fraction irréductible.
   a. Calculer la probabilité que la médaille tirée soit argentée et représente le château de Langeais.
   b. Montrer que la probabilité que la médaille tirée représente le château de Langeais est égale à $\frac{21}{40}$.
   c. Sachant que la médaille tirée représente le château de Langeais, quelle est la probabilité que celle-ci soit dorée ?
2. Sachant que la médaille tirée représente le château de Saumur, donner la probabilité que celle-ci soit argentée.

Partie B

Une médaille est dite conforme lorsque sa masse est comprise entre 9,9 et 10,1 grammes.
On dispose de deux machines M_1 et M_2 pour produire les médailles.

1. Après plusieurs séries de tests, on estime qu'une machine M_1 produit des médailles dont la masse X en grammes suit la loi normale d'espérance 10 et d'écart-type 0,06.
   On note C l'évènement « la médaille est conforme ».
   Calculer la probabilité qu'une médaille produite par la machine M_1 ne soit pas conforme. On donnera le résultat arrondi à 10^{-3} près.

2. La proportion des médailles non conformes produites par la machine M_1 étant jugée trop importante, on utilise une machine M_2 qui produit des médailles dont la masse Y en grammes suit la loi normale d'espérance $\mu = 10$ et d'écart-type σ.
   a. Soit Z la variable aléatoire égale à $\frac{Y-10}{\sigma}$. Quelle est la loi suivie par la variable Z ?
   b. Sachant que cette machine produit 6 % de pièces non conformes, déterminer la valeur arrondie au millième de σ.

Ex 40 : *Baccalauréat S Antilles-Guyane 11 sept 2014 - ex 1*

Probabilités conditionnelles – Probabilité totale – Loi exponentielle – loi normale

Une entreprise de jouets en peluche souhaite commercialiser un nouveau produit et à cette fin, effectue divers tests permettant de rejeter les peluches ne répondant pas aux normes en vigueur. D'expérience, le concepteur sait que 9 % des nouveaux jouets ne répondent pas aux normes.
À l'issue des tests, il est noté que

- 96 % des peluches répondant aux normes sont acceptées par les tests ;
- 97 % des peluches ne répondant pas aux normes ne sont pas acceptées à l'issue des tests.

On prélève une peluche au hasard dans la production de l'entreprise. On note

- N l'évènement : « la peluche répond aux normes en vigueur » ;
- A l'évènement : « la peluche est acceptée à l'issue des tests ».

Partie A

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation exposée précédemment.
2. Démontrer que la probabilité qu'une peluche soit acceptée à l'issue des tests est 0,876 3.
3. Calculer la probabilité qu'une peluche qui a été acceptée à l'issue des tests soit véritablement aux normes en vigueur. Arrondir le résultat au dix-millième.

Partie B

On considère que la vie d'une peluche se termine lorsqu'elle subit un dommage majeur (déchirure, arrachage ...). On admet que la durée de vie en années d'une peluche, notée D, suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. On sait que $P(D \leqslant 4) = 0,5$. Interpréter ce résultat dans le contexte de cet exercice.
   Calculer la valeur exacte de λ.
2. On prendra ici $\lambda = 0,1733$.
   Le jour de ses trois ans, un enfant qui joue avec cette peluche depuis sa naissance décide, voyant qu'elle est encore en parfait état, de la donner à sa sœur qui vient de naître.
   Calculer la probabilité pour que sa sœur la garde sans dommage majeur au moins cinq années supplémentaires. Arrondir le résultat au dix-millième.

Partie C

Un cabinet de sondages et d'expertise souhaite savoir quel est le réel intérêt des enfants pour ce jouet. À la suite d'une étude, il apparaît que pour un enfant de quatre ans, le nombre de jours, noté J, où la peluche est son jouet préféré suit une loi normale de paramètres μ et σ. Il apparaît que $\mu = 358$ jours.

1. Soit $X = \frac{J-358}{\sigma}$. Quelle est la loi suivie par X ?
2. On sait que $P(J \leqslant 385) = 0,975$. Déterminer la valeur de σ arrondie à l'entier le plus proche.