LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

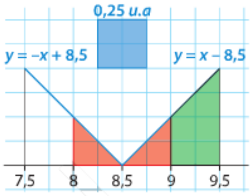
Il existe des variables aléatoires non discrètes, qui prennent toutes les valeurs d'un intervalle de $\mathbb{R}$. (borné ou non).

Exemples : Le temps d'attente à un arrêt de bus ; la durée de vie d'un transistor ; la distance du point d'impact au centre d'une cible……

On s'intéresse alors à des événements du type : " X prend ses valeurs dans l'intervalle I " .

1) GÉNÉRALITÉS

Exemple d'introduction :



Un entrepôt accueille tous les matins des camions de livraison sur un créneau de deux heures d'ouverture, de 7h30 à 9h30 .
On considère X la variable aléatoire donnant l'heure d'arrivée d'un camion qui se présente tous les matins à l'entrepôt aux heures d'ouverture .
On admet que la probabilité que ce camion arrive dans un intervalle de temps donné $[t_1 ; t_2]$ est égale à l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, les deux segments tracés ci-contre, et les droites d'équations $x = t_1$, et $x = t_2$, parallèles à l'axe des ordonnées.
Ainsi, la probabilité d'arrivée du camion entre 8h00 et 9h00 est égale à l'aire colorée en rouge : $P(X \in [8 ; 9]) = 0{,}25$,

La probabilité qu'il arrive entre 9h et 9h30 est : $P(X \in [9 ; 9{,}5]) = \int_9^{9{,}5} (x - 8{,}5)\,\mathrm{d}x = 0{,}375$

Enfin. on vérifie (et c'est indispensable) que : $P(X \in [7{,}5 ; 9{,}5]) = \int_{7{,}5}^{9{,}5} |x - 8{,}5|\,\mathrm{d}x = 1$

Rappel :

$$|x - 8{,}5| = \begin{cases} x - 8{,}5 \text{ si } x \geqslant 8{,}5 \\ -x + 8{,}5 \; x \leqslant 8{,}5 \end{cases}$$

On dit que la fonction $x \longmapsto |x - 8{,}5|$ est la **densité** de la variable aléatoire X.

Remarque :
Les valeurs plus ou moins grandes prises par la fonction sur les différents intervalles donnent plus ou moins de poids à la probabilité de cet intervalle . Ce qui explique le nom de « densité » donné à la fonction.

Définition :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
On dit qu'une variable aléatoire X est **continue** (absolument continue ou à densité) sur I, s'il existe une fonction f :

- positive et continue (sauf peut-être en quelques points) sur I
- nulle en dehors de I
- telle que $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 1$, et telle que pour tout intervalle J inclus dans I : $P(X \in J) = \int_J f(t)\,\mathrm{d}t$

f est appelée **densité** de X.

- Si $I = [a ; b]$:
$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$
- Si $I = [a ; +\infty[$:

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe, on a :
$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Remarques :

- La probabilité de la réunion d'un nombre fini quelconque d'intervalles de I disjoints deux à deux est égale à la somme des probabilités de ces intervalles. (D'après les propriétés de l'intégrale)
Ainsi si $J \subset I$, $K \subset I$ et $J \cap K = \emptyset$ alors $P(X \in J \cup K) = P(X \in J) + P(X \in K)$
- La probabilité que X prenne une valeur isolée de I est nulle. En effet, pour tout réel a de I :
$$P(X = a) = P(X \in [a ; a]) = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$
- On en déduit que pour tous réels a et b de I, avec $a < b$:
$P(X \in [a ; b]) = P(X \in [a ; b[) = P(X \in]a ; b]) = P(X \in]a ; b[)$ et $P(X > a) = P(X \geqslant a)$, etc ...

2) LOI UNIFORME

Définition :

La loi uniforme sur $[a ; b]$, est la loi de probabilité ayant pour densité la fonction f définie sur $[a ; b]$ par la fonction constante :

$$f : t \longmapsto \frac{1}{b - a}$$

Propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant **la loi uniforme** sur $[a ; b]$.
Pour tout intervalle $[c ; d]$, tel que $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$, on a :

$$P(X \in [c ; d]) = \frac{d - c}{b - a}$$

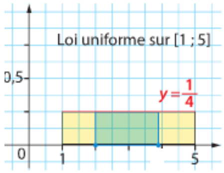
Cette formule est à rapprocher de la formule :
$$\frac{\textit{Nombre de cas favorables}}{\textit{Nombre de cas possibles}}$$
vue dans les situations d'équiprobabilité en nombre fini.

Remarque :
La probabilité $P(X \in [c ; d])$ est proportionnelle à l'amplitude de l'intervalle $[c ; d]$.

Exemple :

$P(X \in [1;2]) = P(X \in]4;5[) = \dfrac{1}{4}$

Si $c \in [2;5]$, $P(X \in [2;c]) = \dfrac{c-2}{4}$



Définition et propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant **la loi uniforme** sur $[a\,;b]$.

On définit l'espérance de X par $E(X) = \displaystyle\int_a^b t \times \frac{1}{(b-a)}\,\mathrm{d}t$

On a $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$

De manière plus générale, l'espérance d'une variable aléatoire à densité f sur $[a\,;b]$ est définie par $E(X) = \displaystyle\int_a^b t\,f(t)\,\mathrm{d}t$

Cette définition constitue un prolongement dans le cadre continu de l'espérance d'une variable aléatoire discrète.

3) LOI EXPONENTIELLE

Définition :

Soit λ un réel strictement positif.
La **loi exponentielle de paramètre** λ est la loi de probabilité ayant pour densité la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f : t \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$$

Propriétés :

Soit X une variable aléatoire suivant la **loi exponentielle de paramètre** λ **(**$\lambda \in \mathbb{R}_+^*$**).**

- Pour tout intervalle $[c\,;d]$, tel que $0 \leqslant c \leqslant d$, on a :

$$P(X \in [c\,;d]) = P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-\lambda c} - \mathrm{e}^{-\lambda d}$$

- Pour tout réel $a \geqslant 0$, $P(X \leqslant a) = P(X < a) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}$
- Pour tout réel $a \geqslant 0$, $P(X \geqslant a) = P(X > a) = 1 - P(X \leqslant a) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$

Exemples : *Les démonstrations des propriétés ci-dessus sont identiques.*

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 2 :

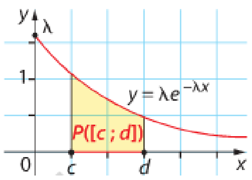
$$P(1 \leqslant X \leqslant 2) = \int_1^2 2\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-2t}\right]_1^2 = -\mathrm{e}^{-4} + \mathrm{e}^{-2} = \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{\mathrm{e}^4} \approx 0{,}117$$

$$P(X > 1) = 1 - \int_0^1 2\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = 1 - \left(-\mathrm{e}^{-2} + 1\right) = \mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}135$$

Remarques :

- On a $\displaystyle\lim_{a \to +\infty} \int_0^a \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = 1$ (en effet $\displaystyle\lim_{a \to +\infty} \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}\right) = 1$)

- La probabilité de l'intervalle $[c\,;d]$ s'interprète comme l'aire comprise entre la courbe représentant la densité, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = c$ et $x = d$.



Propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ **(**$\lambda \in \mathbb{R}_+^*$**).**
Pour tous réels positifs s et t, on a :

$$P_{X>s}(X > s+t) = P(X > t)$$

On dit que la loi exponentielle est une loi de durée de vie sans vieillissement

Preuve : *exigible*

$P_{X>s}(X > s+t) = \dfrac{P\left((X > s+t) \cap (X > s)\right)}{P(X > s)}$

Or, $(X > s+t) = (X \in]s+t\,;+\infty[)$, $(X > s) = (X \in]s\,;+\infty[)$ et $(X \in]s+t\,;+\infty[) \subset (X \in]s\,;+\infty[)$

Donc , $(X \in]s\,;+\infty[) \cap (X \in]s+t\,;+\infty[) = (X > s+t)$

D'autre part , $P(X > s+t) = \mathrm{e}^{-\lambda(s+t)}$ et $P(X > s) = \mathrm{e}^{-\lambda s}$

Ainsi , $P_{X>s}(X > s+t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda(s+t)}}{\mathrm{e}^{-\lambda s}} = \mathrm{e}^{-\lambda t} = P(X > t)$

Signification : Si par exemple X désigne la durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique, la probabilité qu'il fonctionne encore t années sachant qu'il a déjà fonctionné pendant s années est la même que la probabilité qu'il fonctionne pendant au moins t années après sa mise en service.

Remarque : Cette loi modélise le phénomène de "mort sans vieillissement", observé par exemple pour la désintégration radioactive.

Définition et propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant la **loi exponentielle de paramètre** λ **(**$\lambda \in \mathbb{R}_+^*$**)**.

On définit l'espérance de X par $E(X)=\lim_{a\to+\infty}\int_0^a t\times\lambda e^{-\lambda t}\,dt$

On a $E(X)=\frac{1}{\lambda}$.

Preuve : *exigible*

On cherche une primitive de $f_\lambda : t\longmapsto t\times\lambda e^{-\lambda t}$ sur $\mathbb{R}^+$ sous la forme d'une fonction $F_\lambda : t\longmapsto (mt+n)e^{-\lambda t}$ ($m\in\mathbb{R}^*$, $n\in\mathbb{R}$)

F_λ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ par produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$.

$\forall t\in\mathbb{R}^+,\ F'_\lambda(t)=m e^{-\lambda t}-\lambda(mt+n)e^{-\lambda t}=(-\lambda mt+(m-\lambda n))e^{-\lambda t}$

En identifiant F'_λ à f_λ, on obtient :

$$\begin{cases}-\lambda m=\lambda\\ m-\lambda n=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-1\\ n=-\frac{1}{\lambda}\end{cases}$$

On en déduit que $F_\lambda : t\longmapsto\left(-t-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}$

Ainsi, pour tout $a\geqslant 0$, on obtient :

$$\int_0^a t\times\lambda e^{-\lambda t}\,dt=F_\lambda(a)-F_\lambda(0)=\left(-a-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda a}-\left(-\frac{1}{\lambda}\right)=\left(-a-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda a}+\frac{1}{\lambda}=-\frac{a}{e^{\lambda a}}-\frac{1}{\lambda e^{\lambda a}}+\frac{1}{\lambda}$$

Grâce aux résultats de croissances comparées, on conclut que

$$E(X)=\lim_{a\to+\infty}\int_0^a t\times\lambda e^{-\lambda t}\,dt=\frac{1}{\lambda}$$

Remarque : L'espérance $\frac{1}{\lambda}$ est appelée la durée moyenne de vie de la variable aléatoire X.

4) LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE

A) THÉORÈME DE MOIVRE-LAPLACE

La loi binomiale est très utilisée en modélisation, mais certaines probabilités sont impossibles à calculer pour la loi binomiale.
Grâce au théorème suivant, le calcul de ces probabilités est rendu possible à l'aide de la loi normale.
C'est historiquement la première motivation de l'utilisation de la loi normale en pratique.

Théorème de Moivre-Laplace : *admis*

Soit X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale $B(n\,;\,p)$.

On pose $Z_n=\frac{X_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

Pour tous réels a et b, avec $a<b$: $\lim_{n\to+\infty}P(Z_n\in[a\,;\,b])=\int_a^b\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

On considère que la limite est pratiquement atteinte lorsqu'on a simultanément :

$n\geqslant 30$
$np\geqslant 5$
$n(1-p)\geqslant 5$

B) LOI *N*(0;1)

Propriété : *admise*

Si $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$, alors : $\lim_{x\to-\infty}\int_x^0 f(t)\,dt=\frac{1}{2}$ et $\lim_{y\to+\infty}\int_0^y f(t)\,dt=\frac{1}{2}$

La fonction f permet de définir une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Définition :

La loi normale centrée réduite $N(0\,;1)$ est la loi de probabilité ayant pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Définition et propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $N(0\,;1)$.

On définit l'espérance de X par $E(X)=\lim_{x\to-\infty}\int_x^0 tf(t)\,dt+\lim_{y\to+\infty}\int_0^y tf(t)\,dt$

On a $E(X)=0$.

Preuve : *exigible (on peut établir que …)*

$$\int_x^0 t\,f(t)\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^0 t\,e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-e^{-\frac{t^2}{2}}\right]_x^0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-1+e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$

De la même façon, on montre que : $\int_0^y t\,f(t)\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\frac{y^2}{2}}+1\right)$

On a alors : $\lim_{x\to-\infty}\int_x^0 t\,f(t)\,dt=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ et $\lim_{y\to+\infty}\int_0^y t\,f(t)\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

On en déduit que $E(X)=0$.

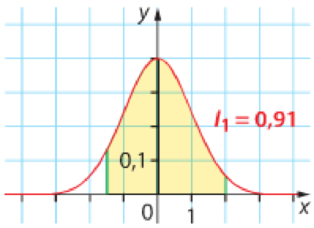
Propriété : *admise*

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $N(0\,;1)$.
La variance de X est $V(X)=E\left((X-E(X))^2\right)=1$

La moyenne des carrés des écarts à la moyenne.

Remarque :

La fonction f est paire et sa courbe et donc symétrique par rapport à l'axe (Oy).
De plus, on ne connaît pas de primitive explicite de la fonction f.
La plupart des calculs liés à la loi normale seront donc des estimations.
Par exemple, $P(-1{,}5\leqslant X\leqslant 2)\approx 0{,}91$



Théorème :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $N(0\,;1)$.
Pour tout réel $\alpha\in]0\,;1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que $P(-u_\alpha\leqslant X\leqslant u_\alpha)=1-\alpha$.

Preuve : *exigible*

On considère la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(t)=P(-t\leqslant X\leqslant t)=\int_{-t}^{t} f(x)\,dx$ où $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

Comme f est paire, on a pour tout réel t positif : $g(t)=2\int_0^t f(x)\,dx$

Comme f est continue et positive, on en déduit que g est dérivable, et que sa dérivée $2f$ est strictement positive.
g est donc strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

De plus $g(0)=0$ et $\lim_{t\to+\infty}g(t)=\lim_{t\to+\infty}2\int_0^t f(x)\,dx=2\times\frac{1}{2}=1$

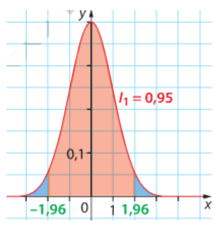
Soit $\alpha\in]0\,;1[$, on a alors $0<1-\alpha<1$

Grâce au théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe au moins un réel $u_\alpha\in[0\,;+\infty[$, tel que $g(u_\alpha)=1-\alpha$.
Comme, de plus g est strictement croissante, on en déduit que u_α est unique.

Valeurs à connaître :

- $u_{0,05}\approx 1{,}96$
- $u_{0,01}\approx 2{,}58$

Sur le graphique ci-contre représentant la courbe en cloche associée à la loi normale centrée réduite, l'aire de la surface en rouge est environ egale à 0,95.



5) LOI NORMALE $N(\mu \cdot \sigma^2)$

Définition :

Soit μ un réel et σ un réel strictement positif.

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi normale $N(\mu \cdot \sigma^2)$, si la variable aléatoire $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $N(0\,;\,1)$.

Propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi loi normale $N(\mu \cdot \sigma^2)$.

- L'espérance de X est $E(X)=\mu$ et la variance de X est $V(X)=\sigma^2$
- $P(X \in [\mu-\sigma\,;\,\mu+\sigma]) \approx 0{,}683$
- $P(X \in [\mu-2\sigma\,;\,\mu+2\sigma]) \approx 0{,}954$
- $P(X \in [\mu-3\sigma\,;\,\mu+3\sigma]) \approx 0{,}997$

Remarques :

- μ est la moyenne et σ l'écart type de X ; μ est un paramètre de position de X, et σ un paramètre de dispersion.
- La densité de la loi normale $N(\mu \cdot \sigma^2)$ est représentée par une courbe en cloche dont l'axe de symétrie vertical a pour équation $x=\mu$.
  La valeur de σ est reliée à l'étalement de la courbe : plus σ est petit, plus la cloche est resserrée autour de son axe de symétrie, et moins la dispersion est grande.

Représentation graphique : $N(\mu \cdot \sigma^2)$ avec $\mu=1$ et $\sigma=2$

La courbe ci-contre représente la loi normale $N(1\,;\,4)$.
Elle admet la droite d'équation $x=1$ pour axe de symétrie .
D'après la propriété ci-dessus, $P(X \in [-1\,;\,3]) \approx 0{,}683$