LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

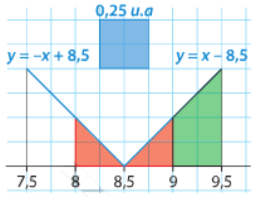
Il existe des variables aléatoires non discrètes, qui prennent toutes les valeurs d'un intervalle de $\mathbb{R}$. (borné ou non).

Exemples : Le temps d'attente à un arrêt de bus ; la durée de vie d'un transistor ; la distance du point d'impact au centre d'une cible……

On s'intéresse alors à des événements du type : " X prend ses valeurs dans l'intervalle I " .

1) GÉNÉRALITÉS

Exemple d'introduction :



Un entrepôt accueille tous les matins des camions de livraison sur un créneau de deux heures d'ouverture, de 7h30 à 9h30 .
On considère X la variable aléatoire donnant l'heure d'arrivée d'un camion qui se présente tous les matins à l'entrepôt aux heures d'ouverture .
On admet que la probabilité que ce camion arrive dans un intervalle de temps donné $[t_1 ; t_2]$ est égale à l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, les deux segments tracés ci-contre, et les droites d'équations $x = t_1$, et $x = t_2$, parallèles à l'axe des ordonnées.
Ainsi, la probabilité d'arrivée du camion entre 8h00 et 9h00 est égale à l'aire colorée en rouge : $P(X \in [8 ; 9]) =$

La probabilité qu'il arrive entre 9h et 9h30 est : $P(X \in [9 ; 9{,}5]) =$

Enfin. on vérifie (et c'est indispensable) que : $P(X \in [7{,}5 ; 9{,}5]) =$

Rappel :

$|x - 8{,}5| =$

On dit que la fonction $x \longmapsto |x - 8{,}5|$ est la **densité** de la variable aléatoire X.

Remarque :
Les valeurs plus ou moins grandes prises par la fonction sur les différents intervalles donnent plus ou moins de poids à la probabilité de cet intervalle . Ce qui explique le nom de « densité » donné à la fonction.

Définition :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
On dit qu'une variable aléatoire X est **continue** (absolument continue ou à densité) sur I, s'il existe une fonction f :
- positive et continue (sauf peut-être en quelques points) sur I
- nulle en dehors de I
- telle que $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 1$, et telle que pour tout intervalle J inclus dans I : $P(X \in J) = \int_J f(t)\,\mathrm{d}t$

f est appelée **densité** de X.

- Si $I = [a ; b]$:
$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$
- Si $I = [a ; +\infty[$:
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe, on a :
$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Remarques :
- La probabilité de la réunion d'un nombre fini quelconque d'intervalles de I disjoints deux à deux est égale à la somme des probabilités de ces intervalles. (D'après les propriétés de l'intégrale)
Ainsi si $J \subset I$, $K \subset I$ et $J \cap K = \varnothing$ alors

- La probabilité que X prenne une valeur isolée de I est nulle. En effet, pour tout réel a de I :

- On en déduit que pour tous réels a et b de I, avec $a < b$:

2) LOI UNIFORME

Définition :

La loi uniforme sur $[a ; b]$, est la loi de probabilité ayant pour densité la fonction f définie sur $[a ; b]$ par la fonction constante :

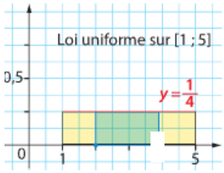
Propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant **la loi uniforme** sur $[a ; b]$.
Pour tout intervalle $[c ; d]$, tel que $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$, on a :

Cette formule est à rapprocher de la formule : $\dfrac{\textit{Nombre de cas favorables}}{\textit{Nombre de cas possibles}}$
vue dans les situations d'équiprobabilité en nombre fini.

Remarque :
La probabilité $P(X \in [c ; d])$ est proportionnelle à l'amplitude de l'intervalle $[c ; d]$.

Exemple :



Définition et propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant **la loi uniforme** sur $[a\,;b]$.
On définit l'espérance de X par

On a

De manière plus générale, l'espérance d'une variable aléatoire à densité f sur $[a\,;b]$ est définie par

3) LOI EXPONENTIELLE

Définition :

Soit λ un réel strictement positif.
La **loi exponentielle de paramètre** λ est la loi de probabilité ayant pour densité la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

Propriétés :

Soit X une variable aléatoire suivant la **loi exponentielle de paramètre** λ ($\lambda \in \mathbb{R}_+^*$).

- Pour tout intervalle $[c\,;d]$, tel que $0 \leqslant c \leqslant d$, on a :

$$P(X\in[c\,;d])=P(c\leqslant X\leqslant d)=\int_c^d \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-\lambda c}-\mathrm{e}^{-\lambda d}$$

- Pour tout réel $a\geqslant 0$, $P(X\leqslant a)=P(X<a)=1-\mathrm{e}^{-\lambda a}$
- Pour tout réel $a\geqslant 0$, $P(X\geqslant a)=P(X>a)=1-P(X\leqslant a)=\mathrm{e}^{-\lambda a}$

Exemples : *Les démonstrations des propriétés ci-dessus sont identiques.*

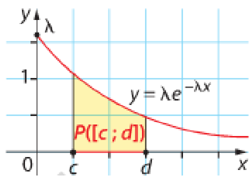
Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 2 :

$P(1\leqslant X\leqslant 2)=$

$P(X>1)=$

Remarques :

- On a $\lim\limits_{a\to+\infty}\int_0^a \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t=1$ (en effet $\lim\limits_{a\to+\infty}(1-\mathrm{e}^{-\lambda a})=1$)
- La probabilité de l'intervalle $[c\,;d]$ s'interprète comme l'aire comprise entre la courbe représentant la densité, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=c$ et $x=d$.



Propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda \in \mathbb{R}_+^*$).
Pour tous réels positifs s et t, on a :

On dit que la loi exponentielle est une loi de durée de vie sans vieillissement

Preuve : *exigible*

Signification : Si par exemple X désigne la durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique, la probabilité qu'il fonctionne encore t années sachant qu'il a déjà fonctionné pendant s années est la même que la probabilité qu'il fonctionne pendant au moins t années après sa mise en service.

Remarque : Cette loi modélise le phénomène de "mort sans vieillissement", observé par exemple pour la désintégration radioactive.

Définition et propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant la **loi exponentielle de paramètre** λ **(**$\lambda \in \mathbb{R}_+^*$**)**.

On définit l'espérance de X par

On a

Preuve : *exigible*

Remarque : L'espérance $\frac{1}{\lambda}$ est appelée la durée moyenne de vie de la variable aléatoire X.

4) LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE

A) THÉORÈME DE MOIVRE-LAPLACE

La loi binomiale est très utilisée en modélisation, mais certaines probabilités sont impossibles à calculer pour la loi binomiale.
Grâce au théorème suivant, le calcul de ces probabilités est rendu possible à l'aide de la loi normale.
C'est historiquement la première motivation de l'utilisation de la loi normale en pratique.

Théorème de Moivre-Laplace : *admis*

Soit X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale $B(n\ ;\ p)$.
On pose

Pour tous réels a et b, avec $a < b$:

On considère que la limite est pratiquement atteinte lorsqu'on a simultanément :

$n \geqslant 30$
$np \geqslant 5$
$n(1-p) \geqslant 5$

B) LOI *N*(0;1)

Propriété : *admise*

Si $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$, alors : $\lim\limits_{x \to -\infty} \int_x^0 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{y \to +\infty} \int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$
La fonction f permet de définir une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Définition :

La loi normale centrée réduite $N(0\ ;\ 1)$ est la loi de probabilité ayant pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

Définition et propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $N(0\ ;\ 1)$.

On définit l'espérance de X par

On a

Preuve : *exigible*

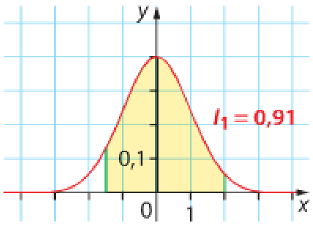
Propriété : *admise*

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $N(0\,;1)$. La variance de X est $V(X)=E\left((X-E(X))^2\right)=1$

La moyenne des carrés des écarts à la moyenne.

Remarque :

La fonction f est paire et sa courbe et donc symétrique par rapport à l'axe (Oy).
De plus, on ne connaît pas de primitive explicite de la fonction f.
La plupart des calculs liés à la loi normale seront donc des estimations.
Par exemple, $P(-1{,}5\leqslant X\leqslant 2)\approx 0{,}91$



Théorème :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite $N(0\,;1)$. Pour tout réel $\alpha\in]0\,;1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que

Preuve : *exigible*

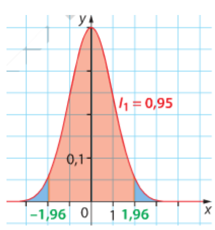
On considère la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(t)=P(-t\leqslant X\leqslant t)=\int_{-t}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$ où $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$

Comme f est paire, on a pour tout réel t positif :

Valeurs à connaître :

• $u_{0,05}\approx 1{,}96$	• $u_{0,01}\approx 2{,}58$

Sur le graphique ci-contre représentant la courbe en cloche associée à la loi normale centrée réduite, l'aire de la surface en rouge est environ egale à 0,95.



5) LOI NORMALE $N(\mu \cdot \sigma^2)$

Définition :

Soit μ un réel et σ un réel strictement positif.
On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi normale $N(\mu \cdot \sigma^2)$, si la variable aléatoire

Propriété :

Soit X une variable aléatoire suivant la loi loi normale $N(\mu \cdot \sigma^2)$.

- L'espérance de X est $E(X)=\mu$ et la variance de X est $V(X)=\sigma$ ²
- $P(X \in [\mu-\sigma ; \mu+\sigma]) \approx 0{,}683$
- $P(X \in [\mu-2\sigma ; \mu+2\sigma]) \approx 0{,}954$
- $P(X \in [\mu-3\sigma ; \mu+3\sigma]) \approx 0{,}997$

Remarques :

- μ est la moyenne et σ l'écart type de X ; μ est un paramètre de position de X, et σ un paramètre de dispersion.
- La densité de la loi normale $N(\mu \cdot \sigma^2)$ est représentée par une courbe en cloche dont l'axe de symétrie vertical a pour équation $x=\mu$.
  La valeur de σ est reliée à l'étalement de la courbe : plus σ est petit, plus la cloche est resserrée autour de son axe de symétrie, et moins la dispersion est grande.

Représentation graphique : $N(\mu \cdot \sigma^2)$ avec $\mu=1$ et $\sigma=2$

La courbe ci-contre représente la loi normale $N(1 ; 4)$.
Elle admet la droite d'équation $x=1$ pour axe de symétrie .
D'après la propriété ci-dessus, $P(X \in [-1 ; 3]) \approx 0{,}683$