Continuité : maîtriser le cours

Ex 1 : ***Vrai ou faux***

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et C sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Si f est continue sur I , alors :

1) On peut tracer une tangente non verticale en tout point de C .
2) f est une fonction qui ne change pas de sens de variation.
3) C se trace sans lever le crayon.
4) L'intervalle I est fermé.
5) La fonction inverse est continue sur $\mathbb{R}^*$.
6) La fonction inverse est continue sur $]-\infty;0[$
7) La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.
8) La fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Justifier la continuité d'une fonction sur un intervalle

Ex 2 :

Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur l'intervalle I indiqué.

1) $f:x \longmapsto \sqrt{3-x}$ sur $I=]-\infty;3[$

2) $f:x \longmapsto 2|x|+\frac{3}{x}$ sur $]0;+\infty[$

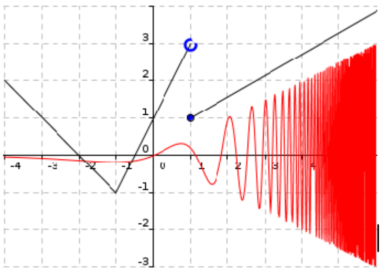
3) $f:x \longmapsto \frac{3x^3}{1-3x}$ sur $I=\left]\frac{1}{3};+\infty\right[$

4) $f:x \longmapsto |2x-3|$ sur $I=\mathbb{R}$

Continuité et représentation graphique

Ex 3 :

1) Déterminer graphiquement si les fonctions dont les courbes représentatives sont données ci-dessous sont continues sur l'intervalle $[-4;6]$.



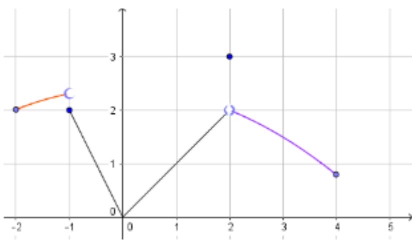
2) Représenter avec un traceur de courbes la fonction $f:x \longmapsto \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$.

f est-elle continue sur]0;1] ?

Essayer de tracer f à la main sans lever le crayon . Que peut-on conclure ?

Ex 4 :

On a tracé ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-2;4]$.



1) La fonction f est-elle dérivable en -1,5 , en 0, en 2 ?
2) La fonction f est-elle continue sur $[-2;2]$, sur $[-2;-1]$, sur $[-2;-1[$?

3) Déterminer $\lim_{x\to 2+} f(x)$, $\lim_{x\to 2-} f(x)$. la fonction f est-elle continue en 2 ?

Ex 5 : ***Avec GeoGebra***

Soit a un entier et f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f_a(x)=x^2-ax+3 \text{ si } x<2 \\ f_a(x)=-x^2+8x+3 \text{ si } x\geq 2 \end{cases}$$

1) Conjecturer avec GeoGebra, l'entier a tel que la fonction f_a soit continue sur $\mathbb{R}$.

2) Démontrer la conjecture précédente.

Avec la fonction partie entière

On note E la fonction partie entière.

Ex 6 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=E\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

1) Tracer la courbe représentative de f avec l'outil de votre choix. Que peut-on conjecturer ?
2) Démontrer la conjecture précédente.
3) Que peut-on en déduire au sujet de la continuité de la fonction f ?

Ex 7 :

Soit les fonctions f et g définies sur $[-5;5]$ par $f(x)=x|x|$ et $g(x)=(2x+1)|x|$.
1) Tracer les courbes représentatives de f et de g avec l'outil de votre choix.
2) f et g sont-elles continues ?
3) Que peut-on conjecturer graphiquement au sujet de la dérivabilité en 0 de f et de g ?
4) Démontrer les deux conjectures précédentes.
5) La fonction valeur absolue est-elle dérivable en 0 ?
Peut-on énoncer une règle concernant la dérivabilité du produit d'une fonction dérivable par une fonction non dérivable ?

Théorème des valeurs intermédiaires – Théorème des bijections

Ex 8 : ***Maîtriser le cours - Vrai ou faux***

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
1) Si f change de signe sur I, alors f s'annule sur I.
2) Si $I=[a;b]$, $f(a)f(b)>0$ et f est continue sur I, alors f ne s'annule pas sur I.
3) Si f s'annule une unique fois sur I et f est strictement monotone sur I, alors f est continue sur I.
4) Si f s'annule une unique fois sur I et f est continue sur I, alors f est strictement monotone sur I.

Ex 9 : ***Au moins une solution***

Montrer que l'équation $(E): \frac{x^3}{x+1}=8$ admet au moins une solution sur $I=[0;4]$.

Ex 10 : ***Une unique solution - utiliser Solve() et nSolve()***

Dans chacun des cas, montrer que l'équation admet une unique solution α sur l'intervalle I et donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} en utilisant les fonctions de Xcas ou de la calculatrice :

- Solve() : fonction de calcul formel .
Elle cherche à appliquer divers algorithmes permettant de résoudre certains types d'équations prédéfinis (équations linéaires, du 2nd, du 3ème ou du 4ème degré, équation avec des racines carrées se ramenant aux types précédents, équations avec des 'cos' et 'sin', etc.)

- nSolve() : fonction fournissant une valeur approchée par la méthode de Newton-Raphson (exercice 19).
Par nature, cette fonction ne peut retourner qu'une seule solution même s'il en existe plusieurs. Elle peut aussi ne rien retourner du tout (plus exactement, elle retourne 'false'), voire retourner un résultat erroné dans les (rares) cas où la méthode de Newton ne converge pas.

Suivant l'outil utilisé (Xcas, Mathematica, Ti-Nspire …) , il est possible de préciser l'intervalle sur lequel la solution est cherchée ou la valeur initiale pour appliquer le méthode de Newton-Raphson.

1) $(\mathrm{E}):\sqrt{1-x}=x$ sur $\mathrm{I}=]-\infty;1[$

2) $(\mathrm{E}):\dfrac{x-2}{1+x^2}=x-2$ sur $\mathrm{I}=[1;+\infty[$

3) $(\mathrm{E}):x\sqrt{2x}=2-2x$ sur $\mathrm{I}=\mathbb{R}^+$

Ex 11 :

Soit f une fonction définie et continue sur $[-1;1]$, telle que pour tout $x\in[-1;1]$, $(f(x))^2=1-x^2$.

1) Démontrer que f ne s'annule pas sur $]-1;1[$.

2) En déduire que f est de signe constant.

3) Donner l'expression de $f(x)$ lorsque f est positive, puis lorsque f est négative.

4) Les résultats précédents restent-ils vrais si f n'est pas continue sur $[-1;1]$?

Ex 12 : ***Signe de f(x)***

Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ telle que :
- Les solutions de l'équation $f(x)=0$ sont -4 et 3.
- Les solutions de l'équation $f(x)=-2$ sont -9 et 4
- $f(0)=2$

Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

Ex 13 : ***Signe de f(x)***

On donne le tableau de variation d'une fonction f .

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

1) Combien l'équation $f(x)=0$ admet-elle de solutions sur $]-\infty;0[$?

2) Combien l'équation $f(x)=0$ admet-elle de solutions sur $]0;+\infty[$?

3) En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

Ex 14 : ***Signe de f(x)***

On donne le tableau de variation d'une fonction f .

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

1) Combien l'équation $f(x)=0$ admet-elle de solutions sur $]-\infty;3[$? A quel intervalle appartient chacune d'elle ?

2) Combien l'équation $f(x)=0$ admet-elle de solutions sur $]3;+\infty[$?

3) En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

Ex 15 : ***f(x)=k : discussion suivant les valeurs de k***

On donne le tableau de variation d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	3	↘	-1	↗	1

1) Déterminer les extrema de f .
2) Combien l'équation $f(x)=0$ admet-elle de solutions sur $\mathbb{R}$?
3) Déterminer le signe de f .
4) Discuter suivant les valeurs du réel k , le nombre de solutions de l'équation $f(x)=k$.

Ex 16 : ***Tableau de variation de f à partir du tableau de variation de f'***

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la fonction dérivée f' (f' étant continue) admet le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f'	$-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$

Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x et en déduire les variations de f .

Ex 17 : *Nécessaire ou suffisant*

Soit f la fonction définie sur $[0;4]$ par :
$$\begin{cases} f(x)=-3x+4 \text{ si } 0\le x<2 \\ f(x)=x-1 \text{ si } 2\le x\le 4 \end{cases}$$

1) Tracer la courbe représentative de f .
2) Les conditions du théorème des bijections sont-elles remplies ?
3) Résoudre l'équation $f(x)=0$ sur $[0;4]$. Que remarque-t-on ?
4) Les conditions du théorème des bijections sont-elles nécessaires ou suffisantes pour l'existence et l'unicité de la solution d'une équation du type $f(x)=0$?

Ex 18 : ***Problèmes ...***

Les questions ci-dessous sont indépendantes.

1) Soit f une fonction définie et continue sur $I=[0;1]$, telle que pour tout $x\in I$, $f(x)\in I$.

Montrer qu'il existe au moins un réel $\alpha\in I$, tel que $f(\alpha)=\alpha$.

2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $a\in\mathbb{R}$.

Discuter suivant les valeurs de n et de a , le nombre de solutions de l'équation $x^n=a$.

Algorithmes

Ex 19 : ***Principe de Dichotomie - Méthode de Newton-Raphson***

A) **Introduction :**
Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère la fonction f définie par $f(x)=x^3+x-3$ et sa courbe représentative C_f .

Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

B) **Rappel : Principe de dichotomie**
1) Compléter l'algorithme ci-dessous et justifier comment choisir a et b.

```
Lire a,b,p
Tant que …                          faire
     Si (f(a)*f((a+b)/2)) …                    alors

        b ← ….

     Fin Si
     Sinon

        a ← ….

     Fin Sinon
Fin Tant que
Afficher a,b
```

2) Programmer cet algorithme et déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

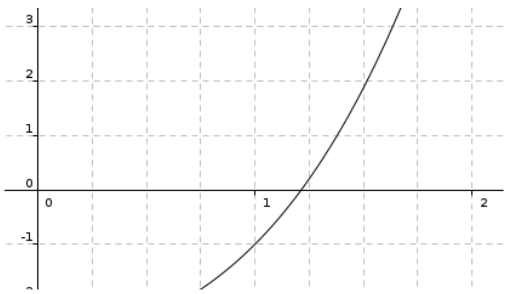
Programme en python

```
def f(x):
 return(x**3+x-3)
a,b,p=float(input("a=")),float(input("b=")),float(input("p="))
while (b-a>10**(-p)):
 if (f(a)*f((a+b)/2)<0):
 b=(a+b)/2
 else:
 a=(a+b)/2
print("a=",a,"et b=",b)
```

(consulter continuité_python19a)

C) **Méthode de Newton-Raphson**

1) On a représenté C_f ci-dessous.



Nous allons déterminer une valeur approchée de α .

a) Tracer la tangente T_{x_0} à C_f au point d'abscisse $x_0=\frac{3}{2}$. T_{x_0} coupe l'axe des abscisses en un unique point A . Que dire de x_1 ?

b) Tracer la tangente T_{x_1} à C_f au point d'abscisse x_1 . T_{x_1} coupe l'axe des abscisses en un unique point B d'abscisse x_2 .
Que dire de x_2 ?

2) **Mise en place de l'algorithme :**

Revenons sur le cas général . Soit f une fonction dont la dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et telle que $f(x)=0$ admette une unique solution α . On note C_f sa courbe représentative . Soit x_0 un réel supérieur à α .

a) Déterminer l'équation de la tangente T_{x_0} à C_f au point d'abscisse x_0 .

b) Démontrer que l'abscisse x_1 du point d'intersection A_1 de T_{x_0} avec l'axe des abscisses vaut $x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. On peut alors répéter ce procédé en remplaçant x_0 par la nouvelle abscisse x_1 , et ainsi obtenir des réels x_1 , x_2 , x_3 … de plus en plus proche de α .

c) On s'intéresse à nouveau à la fonction f définie par $f(x)=x^3+x-3$.
Compléter les pointillés dans l'algorithme suivant pour qu'il affiche les valeurs x_1 , … , x_{10}

Lire x
Pour i allant de 1 à ……. faire
    x← …
    Afficher x
Fin Pour
	Programme en python
	def f(x):
	  return(x**3+x-3)
	def df(x):
	  return(3*x**2+1)
	
	x=float(input("x="))
	for i in range(1,11):
	    x=x-f(x)/df(x)
	    print("x=",x)
	
	(consulter continuité_python19b)

d) On se propose maintenant de trouver un réel x tel que $|f(x)|<10^{-p}$.
Pour cela, compléter les pointillés dans l'algorithme ci-dessous :

Lire x,p
Tant que … faire
    x← …
Fin Tant que
Afficher x
	Programme en python
	def f(x):
	 return(x**3+x-3)
	def df(x):
	 return(3*x**2+1)
	
	x=float(input("x="))
	p=float(input("p="))
	
	while (abs(f(x))>10**(-p)):
	  x=x-f(x)/df(x)
	print("x=",x)
	
	(consulter continuite_python19c)

Programmer cet algorithme et déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

3) **Application :**

Soit f la fonction définie par $f(x)=x^3-5x+1$
Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de la (ou des) solution(s) de l'équation $f(x)=2$ sur $\mathbb{R}$.