CONTINUITÉ

1) DÉFINITION

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

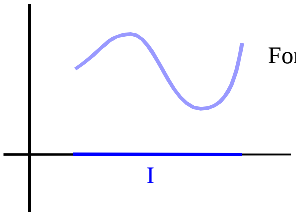
- Soit a un réel appartenant à I. On dit que f est continue en a, si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
- On dit que f est continue sur I, si f est continue en tout point a de I.

Remarque :

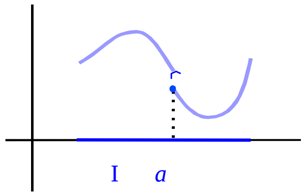
$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$

Graphiquement, on reconnaît qu'une fonction *f* est continue sur *I* lorsqu'on peut tracer sa courbe sur l'intervalle *I* sans lever le stylo de la feuille.

Une fonction n'est pas continue en un point *a* lorsque la courbe a une discontinuité en *a*, elle fait un "saut".

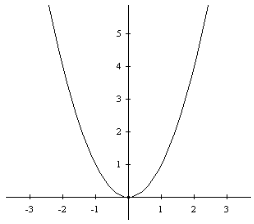


Fonction continue



Fonction discontinue en a

Exemple 1 :



- La fonction $x \longmapsto x^2$ est une fonction continue en tout point a de $\mathbb{R}$, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$.
  On peut le justifier en démontrant que $\lim_{x \to a} x^2 = a^2$, c'est-à-dire en démontrant que x^2 est aussi proche que l'on veut de a^2 lorsqu'on prend x assez proche de a.
  La parabole représentant la fonction $x \longmapsto x^2$ peut être tracée sans lever le stylo de la feuille.

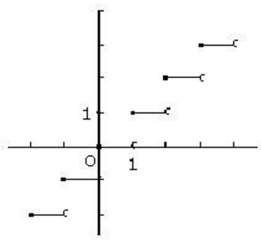
Exemple 2 :

- Considérons la fonction $x \longmapsto$ E(x) appelée fonction "Partie entière" et qui, à tout réel x associe le plus grand entier inférieur ou égal à x.
  E(2,5) = 2 E(-2,4) = -3 E(1,9999) = 1 E(2) = 2

  Si n est un nombre entier, alors E(n) = n et pour tout $x \in [n ; n+1[$, on a E(x) = n

  Cette fonction n'est pas continue en n avec $n \in \mathbb{Z}$
  En effet lorsque x est très proche de n par valeurs inférieures, E(x) n'est pas très proche de E(n).

  La fonction **"Partie entière"** est une fonction dite **"en escalier"**.
  La courbe fait "un saut" pour chaque valeur de x entière.



Notations courantes :
- calculatrices :
int(x) floor(x) partEnt(x) int x
- tableur : ent()

2) FONCTIONS DE RÉFÉRENCES

Propriété :

Les fonctions polynômes, les fonctions rationnelles, la fonction racine carrée, les fonctions sinus et cosinus, les fonction logarithmes et exponentielles sont continues sur tout intervalle sur lequel elles sont définies.
La somme, le produit, le quotient, la composée de fonctions continues est une fonction continue sur tout intervalle sur lequel elle est définie.

Remarques :

- Les démonstrations de ces propriétés se font en utilisant les propriétés des limites.
- La plupart des fonctions qui seront étudiées seront des fonctions continues.
- Il est convenu que, dans un tableau de variations, les flèches obliques indiquent que la fonction est **continue et strictement monotone**.

3) DÉRIVABILITÉ ET CONTINUITÉ

Propriété : *admise*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a est un réel de I.
Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Preuve :

Si f est dérivable en a, alors $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$

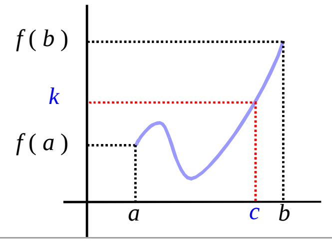
Posons $\varepsilon(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$

Il est alors immédiat que $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right) = 0$

De plus, on a $f(a+h)-f(a)-f'(a)\times h=h\varepsilon(h)$ donc $f(a+h)=f(a)+f'(a)\times h+h\varepsilon(h)$
Les propriétés sur les limites permettent d'affirmer que $\lim\limits_{h\to 0}(f(a)+f'(a)\times h+h\varepsilon(h))=f(a)$
Donc : $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h)=f(a) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$
La fonction f est donc continue en a

Attention :
La réciproque de la propriété est fausse : la fonction racine carrée est continue en 0, mais elle n'est pas dérivable en 0.

4) THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

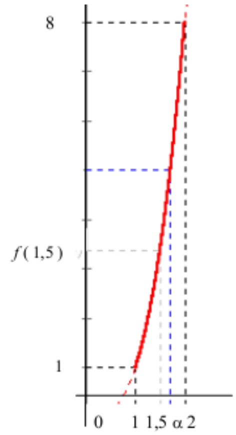


Propriété : *admise*

> Soit f une fonction définie et **continue** sur un intervalle I ,et a et b deux réels de I.
> Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins** un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=k$

> Ce que l'on peut aussi exprimer sous la forme :
> L'équation $f(x)=k$ a **au moins** une solution c comprise entre a et b.

Application : valeur approchée de $\sqrt[3]{5}$



La fonction f définie par $f(x)=x^3$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
De plus $f(1)=1$ et $f(2)=8$
L'équation $x^3=5$ a donc au moins une solution α dans $[1\,;2]$.

De plus, f est strictement croissante :
- si $x>\alpha$, on a $f(x)>f(\alpha)$, donc $x^3>5$
- si $x<\alpha$, on a $f(x)<f(\alpha)$, donc $x^3<5$

Il ne peut donc pas y avoir de solution à l'équation $x^3=5$, qui soit différente de α.
Donc l'équation $x^3=5$ a une solution α unique dans l'intervalle $[1\,;2]$.

Déterminons une valeur approchée de α en utilisant la **méthode de dichotomie.**

Étape 1 :

On a : $\dfrac{1+2}{2}=\dfrac{3}{2}=1{,}5$ $\quad f(1{,}5)=f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\left(\dfrac{3}{2}\right)^3=\dfrac{27}{8}<5$ et $f(2)>5$
Donc 5 est compris entre $f(1{,}5)$ et $f(2)$.
L'utilisation du théorème des valeurs intermédiaires permet alors d'affirmer que : $1{,}5<\alpha<2$

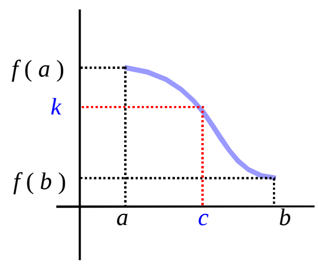
Étape 2 :

On a : $\dfrac{1{,}5+2}{2}=1{,}75$; $f(1{,}75)\approx 5{,}359375$ donc $f(1{,}75)>5$ et $f(1{,}5)<5$
Donc 5 est compris entre $f(1{,}5)$ et $f(1{,}75)$
L'utilisation du théorème des valeurs intermédiaires permet alors d'affirmer que : $1{,}5<\alpha<1{,}75$

En réitérant le procédé, on obtient des encadrements de α d'amplitude diminuée de moitié à chaque étape.

Après 4 étapes supplémentaires, on obtient $\alpha\approx 1{,}71$ $(\textit{à } 10^{-2} \textit{ près})$

5) FONCTION CONTINUE ET STRICTEMENT MONOTONE SUR [a ; b]



Propriété : *admise* - *Théorème des bijections*

> Soit f une fonction définie, **continue et strictement monotone** sur $[a\,;b]$.
> Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **un et un seul** réel c dans $[a\,;b]$ tel que $f(c)=k$.

Preuve :
La fonction f étant définie et continue sur $[a\,;b]$, le théorème des valeurs intermédiaires peut s'appliquer et justifie l'existence d'au moins un réel c dans $[a\,;b]$ tel que $f(c)=k$.
Supposons que f est strictement croissante sur $[a\,;b]$.
Soit $x\in[a\,;b]$
- si $x>c$, on a $f(x)>f(c)$ donc $f(x)>k$, donc $f(x)\neq k$
- si $x<c$, on a $f(x)<f(c)$ donc $f(x)<k$, donc $f(x)\neq k$

Donc pour tout $x\neq c$, on a $f(x)\neq k$
L'équation $f(x)=k$ a donc c pour unique solution dans $[a\,;b]$.

> Ce que l'on peut aussi exprimer sous la forme :
> L'équation $f(x)=k$ a **une unique** solution c comprise entre a et b.

On raisonne de même dans le cas où f est strictement décroissante sur $[a\,;\,b]$.

Remarques :

- Ce théorème peut s'étendre à une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle ouvert éventuellement non borné en utilisant les limites de f aux bornes de cet intervalle . Par exemple :

Si f est une fonction définie, continue et strictement croissante sur $]a\,;\,b]$, alors pour tout réel k dans l'intervalle $\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\,;\,f(b)\right]$ l'équation $f(x)=k$ a une solution unique dans $]a\,;\,b]$.	Si f est une fonction définie, continue et strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,a[$, alors pour tout réel k dans l'intervalle $\left]\lim\limits_{x\to a^-} f(x)\,;\,\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$ l'équation $f(x)=k$ a une solution unique dans $]-\infty\,;\,a[$.

- Si f est continue et strictement monotone sur $[a\,;\,b]$ et si $f(a)\,f(b)<0$, alors l'équation $f(x)=0$ a une solution et une seule sur $[a\,;\,b]$

6) BIJECTION ET FONCTION RÉCIPROQUE

Définition :

Dans le cas où f est strictement croissante sur $[a\,;\,b]$, le théorème précédent justifie que :
pour tout $k\in[f(a)\,;\,f(b)]$, l'équation $f(x)=k$ a une unique solution dans $[a\,;\,b]$.

On dit que f réalise **une bijection** de $[a\,;\,b]$ sur $[f(a)\,;\,f(b)]$.

La fonction qui, à tout réel k de $[f(a)\,;\,f(b)]$ associe l'unique réel c de $[a\,;\,b]$ tel que $f(c)=k$ est appelée **fonction réciproque de *f*** . Elle est notée f^{-1}.

Lorsque f est strictement décroissante sur $[a\,;\,b]$, elle réalise une bijection de $[a\,;\,b]$ sur $[f(b)\,;\,f(a)]$ et on notera de même f^{-1} sa fonction réciproque.

On a alors :

$$f(c)=k \Leftrightarrow c=f^{(-1)}(k)$$

Exemple :

La fonction f définie par $f(x)=x^2$ est une fonction définie, continue et strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
On a $f(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Pour tout réel $k\in[0\,;+\infty[$, l'équation $x^2=k$ a une solution unique dans $[0\,;+\infty[$. Cette solution est $\sqrt{k}$.
Donc f réalise une bijection de $[0\,;+\infty[$ sur $[0\,;+\infty[$.

La fonction réciproque de la fonction "carrée" est la fonction "racine carrée".

Remarque :

Les théorèmes précédents permettent de démontrer l'existence d'une ou de plusieurs solutions à une équation, mais ils ne permettent pas de déterminer la valeur de ces solutions.
On pourra en donner des valeurs approchées en utilisant la méthode de dichotomie ou la méthode de balayage.