CONDITIONNEMENT – INDÉPENDANCE

1) PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Définition :

Soit A et B deux événements tels que $P(B) \neq 0$.
On appelle « **probabilité conditionnelle de A par rapport à B** » ou « **probabilité de A sachant B** » le réel, noté $\boldsymbol{P_B(A)}$ (parfois noté $\boldsymbol{P(A/B)}$) défini par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exemple :

Un lycée a présenté 356 candidats au bac, dont 96 en série S. 256 élèves ont été admis à l'examen ; parmi eux 64 provenaient de la série S.
Un élève étant choisi au hasard parmi les candidats présentés par le lycée, on note A l'événement : « l'élève provient de la série S » et B l'événement : « l'élève a été reçu au bac ».
Chaque élève a la même chance d'être choisi ; par équiprobabilité, on a donc :

$P(A) = \frac{96}{356}$, $P(B) = \frac{256}{356}$ et $P(A \cap B) = \frac{64}{356}$

On en déduit que $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{64}{256} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

La probabilité que l'élève provienne de la série S **sachant qu'il est reçu au bac**, est donc égale à 0,25 .

En général : $P_B(A) \neq P_A(B)$

On a aussi $P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{p(A)} = \frac{P(A \cap B)}{p(A)} = \frac{64}{96} = \frac{2}{3}$

Ainsi la probabilité que l'élève soit reçu au bac **sachant qu'il provient de la série S** est $\frac{2}{3}$.

Remarques :

- Si $A \subset B$, alors $A \cap B = A$ et $P_B(A) = \frac{P(A)}{P(B)}$
- Si $B \subset A$, alors $A \cap B = B$ et $P_B(A) = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

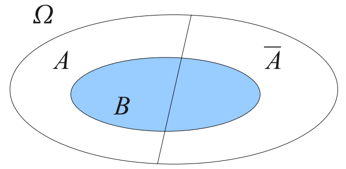
Propriétés :

Soit A et B deux événements tels que $P(B) \neq 0$. On a :

$$0 \leqslant P_B(A) \leqslant 1 \quad \text{et} \quad P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A)$$

Preuve : *La preuve du deuxième point est nécessaire pour la dernière démonstration du cours.*

- On a $A \cap B \subset B$, donc $0 \leqslant P(A \cap B) \leqslant P(B)$ et en divisant les trois membres de cette inégalité par le nombre strictement positif $P(B)$, on obtient : $0 \leqslant \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant P_B(A) \leqslant 1$
- On a $P_B(A \cup \overline{A}) = \frac{P((A \cup \overline{A}) \cap B)}{P(B)} = \frac{P((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B))}{P(B)}$
  Or $P_B(A \cup \overline{A}) = P_B(\Omega) = 1$ et les événements $(A \cap B)$ et $(\overline{A} \cap B)$ sont incompatibles.
  Ce qui donne :
  $1 = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} + \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow 1 = P_B(A) + P_B(\overline{A}) \Leftrightarrow P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A)$



On voit que : $(A \cup \overline{A}) \cap B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$

2) PROBABILITÉ D'UNE INTERSECTION

Propriété : *Formule des probabilités composées*

Soit A et B deux événements tels que $P(B) \neq 0$ et $P(A) \neq 0$. On a :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) \quad \text{et} \quad P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$$

Ces égalités se déduisent de la définition précédente.

Ces deux égalités se retiennent assez facilement : pour que l'événement A et B soit réalisé, il faut d'abord que l'événement A le soit, et sachant que l'événement A est réalisé, il faut ensuite que l'événement B le soit aussi …

Exemple :

Une urne contient trois boules bleues et cinq rouges, indiscernables au toucher.
On tire au hasard une première boule de l'urne . Si elle est bleue, on la remet dans 1'urne et on rajoute une autre boule bleue ; si elle est rouge, on ne la remet pas dans l'urne . On tire ensuite, au hasard, une seconde boule de l'urne.
On s'intéresse à la probabilité pour que les deux boules extraites soient bleues.

B_1 est l'événement : « la première boule extraite est bleue » ; B_2 est l'événement : « la seconde boule extraite est bleue ».
L'événement « les deux boules extraites sont bleues » est alors $B_1 \cap B_2$.

On a $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2)$

Les boules ont la même chance d'être tirées ; par équiprobabilité, on a donc : $P(B_1) = \frac{3}{8}$

B_1 étant réalisé, on rajoute une boule bleue, si bien qu'au moment du second tirage il y a 4 boules bleues sur 9 boules dans l'urne.

Ce qui permet d'écrire $P_{B_1}(B_2) = \frac{4}{9}$

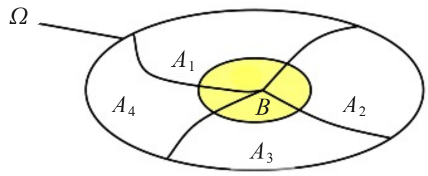
On en déduit : $P(B_1 \cap B_2) = \frac{3}{8} \times \frac{4}{9} = \frac{1}{6}$.   La probabilité que les deux boules extraites soient bleues est donc égale à $\frac{1}{6}$

3) FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES

Ω est l'univers des événements élémentaires d'une expérience aléatoire . A_1 , A_2 , … , A_n désignent des événements de Ω .

Définition :

Dire que A_1 , A_2 , … , A_n réalisent **une partition** de l'univers Ω , signifie que :
- les événements A_1 , A_2 , … , A_n sont deux à deux disjoints
- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$



Tout événement B est alors la réunion **disjointe** des événements $A_1 \cap B$, $A_2 \cap B$, … , $A_n \cap B$

On a donc $P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B)$

De plus pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, on a $P(A_i \cap B) = P(A_i) \times P_{A_i}(B)$

Propriété : *Formule des probabilités totales*

Dans les conditions précédentes on a :

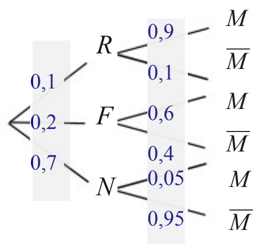
$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_n \cap B)$$

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \ldots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$

La deuxième formule permet de calculer la probabilité d'un événement B dans le cas (fréquent) où l'on connaît les probabilités $P(A_i)$ d'une famille d'événements A_i constituant une partition de l'univers Ω, ainsi que les probabilités conditionnelles de l'événement B par rapport à chaque événement A_i.

Exemple :

Un test d'une maladie est effectué sur la totalité d'une population.
Une étude statistique établit que 70 % de la population réagit négativement au test (événement N) , 20 % réagit faiblement au test (événement F) et 10 % réagit fortement au test (événement R).
La probabilité pour une personne de cette population d'être atteinte de la maladie (événement M) est :
- 0,9 lorsque le test est fortement positif
- 0,6 lorsque le test est faiblement positif
- 0,05 lorsque le test est négatif



Par hypothèse, on a donc :

$P(R) = 0{,}1$, $P(F) = 0{,}2$, $P(N) = 0{,}7$, $P_R(M) = 0{,}9$, $P_F(M) = 0{,}6$ et $P_N(M) = 0{,}05$

Les événements R , F et N constituent une partition de la population.

D'après la formule des probabilités totales, on en déduit que :

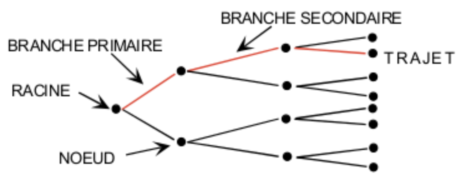
$$P(M) = P(R) \times P_R(M) + P(F) \times P_F(M) + P(N) \times P_N(M) = 0{,}1 \times 0{,}9 + 0{,}2 \times 0{,}6 + 0{,}7 \times 0{,}05 = 0{,}245$$

La probabilité pour qu'une personne de cette population soit atteinte de la maladie est donc égale à $0{,}245$

4) RÈGLES DE CONSTRUCTION D'UN ARBRE PONDÉRÉ (ou arbre de probabilités)

Pour déterminer des probabilités, on peut être amené à construire des arbres dont les branches sont affectées de probabilités.

- Un arbre pondéré se construit et se lit de gauche à droite.
- L'origine de l'arbre est la **racine** de l'arbre.
- Les traits partant de la racine sont appelés **branches primaires** de l'arbre.
  Elles mènent à des **nœuds**.
- Les branches joignant deux nœuds sont dites **secondaires.**
- Tout chemin menant de la racine à un nœud est appelé **trajet.**



Règles :

1. Les événements qui se trouvent aux extrémités des branches primaires forment une **partition** de l'univers Ω.
2. Le **poids** d'une branche primaire est la **probabilité** de l'événement qui se trouve à son extrémité.
3. Le poids d'une branche secondaire est la **probabilité conditionnelle** de l'événement qui se trouve à son extrémité sachant que le trajet menant à son origine a été réalisé.
4. Le poids ou la probabilité d'un trajet est le **produit** des poids des branches le constituant. *(Probabilités composées)*
5. La probabilité d'un événement associé à plusieurs trajets complets est la **somme** des probabilités de ces trajets. *(Probabilités totales)*

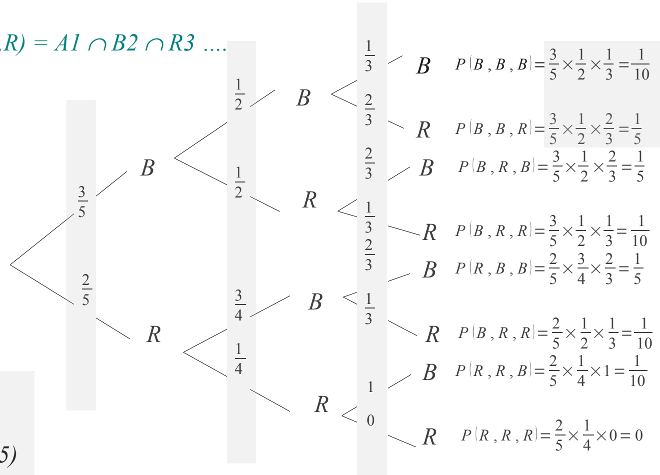
Remarques :

- La somme des poids des branches primaires vaut 1. *(règle 1)*
- La somme des poids des branches secondaires issues d'un même nœud vaut 1. *(car P_A est une probabilité ...)*

Exemple :

Une urne contient trois boules bleues et deux boules rouges.
On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne.
L'expérience aléatoire peut être décrite par l'arbre pondéré suivant :

(A,B,R) = A1 ∩ B2 ∩ R3 ....



- La probabilité que la troisième boule soit rouge sachant que les deux premières étaient bleues est $\frac{2}{3}$. *(règle 3)*
- La probabilité de l'événement (B, B, B) est $\frac{1}{10}$ *(règle 4)*
- Soit A l'événement : « tirer une seule boule rouge ».

A est associé aux trajets (R, B, B), (B, R, B) et (B, B, R).
On a :
$P(A)=P(R,B,B)+P(B,R,B)+P(B,B,R)=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$ *(règle 5)*

Remarque :
Pour des expériences indépendantes, la probabilité de la liste des résultats est le produit des probabilités de chaque résultat. *(vu en 1S)*

5) ÉVÈNEMENTS INDÉPENDANTS

Deux évènements A et B de probabilités non nulles sont dits **indépendants** si le fait que l'un d'entre eux soit réalisé ou non n'influe pas la probabilité que l'autre soit réalisé, c'est à dire :
si $P_B(A)=P(A)$ ou si $P_A(B)=P(B)$
En utilisant la propriété précédente, on constate que l'indépendance de A et B se traduit par la relation $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

Définition :

Soit A et B deux événements de probabilités non nulles.
A et B sont dits **indépendants** s'ils vérifient l'une des trois conditions équivalentes suivantes :

- $P_B(A)=P(A)$
- $P_A(B)=P(B)$
- $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

Exemple :

Une urne contient quatre boules bleues numérotées b_1, b_1, b_2 et b_3, et six boules rouges numérotées r_1, r_1, r_1, r_2, r_3 et r_4.
On suppose toutes ces boules indiscernables au toucher, et on en tire une au hasard.
On considère les événements :
B : « la boule tirée est bleue » ; R : « la boule tirée est rouge » ; Q : « la boule tirée porte le numéro 4 » ; U : « la boule tirée porte le numéro 1 ».
Les boules ont la même chance d'être tirées ; par équiprobabilité, on a donc :

$P(U)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$; $P(B)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$ et $P(B\cap U)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

On a : $P(B\cap U)=P(B)\times P(U)$
Les événements B et U sont donc indépendants.

Ce résultat s'explique en remarquant que la proportion des boules bleues portant le numéro 1 parmi les boules portant le numéro 1 est la même que celle des boules bleues parmi les boules de l'urne.
On a aussi $P(Q)=\frac{1}{10}$, $P(B)=\frac{2}{5}$ et $P(Q\cap B)=0$

On a : $P(B\cap Q)\neq P(B)\times P(Q)$

Les événements B et Q ne sont donc pas indépendants.

Remarques :

- Tout évènement A est indépendant de l'évènement certain et de l'évènement impossible.

- Ne pas confondre événements **incompatibles** et événements **indépendants**.

Deux événements A et B sont incompatibles si et seulement si $A \cap B = \emptyset$. On a alors : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans l'exemple précédent, les événements B et U sont indépendants, mais non incompatibles ; les événements B et Q sont incompatibles et non indépendants.

Propriété :

Soit A et B deux événements de probabilités non nulles.
Si A et B sont deux événements indépendants , alors il en est de même pour $\overline{A}$ et B.

Preuve : *exigible*

On a : $P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A) = 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)}$

Or A et B sont deux événements indépendants.

On en déduit que : $P_B(\overline{A}) = \frac{P(B) - P(A) \times P(B)}{P(B)} = \frac{P(B) \times (1 - P(A))}{P(B)} = 1 - P(A) = P(\overline{A})$