

LES NOMBRES COMPLEXES

1) DÉFINITION - PRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE

Définition :

On appelle **corps des nombres complexes**, et on note \mathbb{C} un ensemble contenant \mathbb{R} tel que :

- Il existe dans \mathbb{C} un élément noté i tel que $i^2 = -1$.
- Tout élément de \mathbb{C} s'écrit sous la forme $a + bi$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
- \mathbb{C} est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent l'addition et la multiplication de \mathbb{R} , et qui suivent les mêmes règles de calcul.

Un nombre complexe sera souvent représenté par la lettre z .

Nombres complexes particuliers :

Soit un nombre complexe $z = a + bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- si $b = 0$, on a $z = a$, z est un réel. (\mathbb{R} est contenu dans \mathbb{C})
- si $a = 0$, on a $z = bi$, on dit que z est un imaginaire pur (on dit parfois simplement imaginaire).

Remarques :

- \mathbb{R} correspond à l'ensemble des points sur une droite. Un nombre réel x correspond au point d'abscisse x sur la droite.
On peut donc toujours comparer deux nombres réels :
si x et y sont des réels, on a nécessairement $x \leq y$ ou $y \leq x$ (Le point d'abscisse x se trouve, sur la droite, "avant" ou "après" le point d'abscisse y)
- \mathbb{C} , ensemble des nombres $a + bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ correspond à l'ensemble des points d'un plan.
Un nombre complexe $a + bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ correspond au point du plan de coordonnées $(a ; b)$.
On ne peut donc pas comparer deux nombres complexes : il n'y a pas de relation d'ordre dans \mathbb{C} .
On ne peut donc pas dire qu'un nombre complexe z est inférieur à un nombre complexe z' ou qu'un nombre complexe z est positif.

Propriété :

L'écriture d'un nombre complexe sous la forme $z = a + bi$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, est unique.

Preuve :

Considérons un nombre complexe z s'écritant de deux façons : $z = a + bi$ et $z = a' + b'i$, avec a, b, a', b' réels.

On a alors $a + bi = a' + b'i$ et on en déduit $a - a' = i(b' - b)$

Supposons que $b \neq b'$, on aurait alors $i = \frac{a - a'}{b' - b}$,

Ceci n'est pas possible puisque $i \notin \mathbb{R}$ alors que $\frac{a - a'}{b' - b} \in \mathbb{R}$

On ne peut donc pas avoir $b \neq b'$, ce qui signifie que $b = b'$.

Alors $b' - b = 0$ et comme on sait que $a - a' = i(b' - b)$, on en déduit $a - a' = 0$ c'est-à-dire $a = a'$.

On a donc obtenu $a = a'$ et $b = b'$. Les deux écritures de z sous la forme $a + bi$ et $a' + b'i$ sont donc identiques.

Définition :

Soit un nombre complexe z .

L'écriture $z = a + bi$, où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, est appelée **forme algébrique** du nombre complexe z .

a est appelé **partie réelle** de z , et b **partie imaginaire** de z .

On note $a = \operatorname{Re}(z)$ et $b = \operatorname{Im}(z)$.

Remarques :

- La partie réelle de z est un nombre réel.
- La partie imaginaire de z est un nombre réel.

Propriété :

Deux complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

C'est-à-dire que si a, b, a', b' sont des réels, on a

$$a + bi = a' + b'i \Leftrightarrow a = a' \text{ et } b = b'$$

Preuve :

Soit z et z' deux nombres complexes : $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$, avec a, b, a', b' réels.

On a alors $a = \operatorname{Re}(z)$, $a' = \operatorname{Re}(z')$, $b = \operatorname{Im}(z)$ et $b' = \operatorname{Im}(z')$

Si $z = z'$, alors $a + bi = a' + b'i$ et comme la forme algébrique d'un nombre complexe est unique, on en déduit que $a = a'$ et $b = b'$.

Donc z et z' ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Réciproquement :

Si z et z' ont la même partie réelle et la même partie imaginaire, alors $a = a'$ et $b = b'$ et par conséquent $a + bi = a' + b'i$, c'est-à-dire $z = z'$

Exemple : Soit $z = 2 + 3i$ et $z' = i - 5$. Calculer et écrire sous forme algébrique :

$$z + z' = -3 + 4i$$

$$z - z' = 7 + 2i$$

$$2z - 3z' = 19 + 3i$$

$$z \cdot z' = -13 - 13i$$

$$z^2 = -5 + 12i$$

Définition :

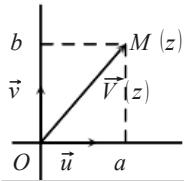
On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Au point M de coordonnées $(a; b)$, on peut associer le nombre complexe $z = a + bi$.

On dit que $z = a + bi$ est l'**affixe** de M ou que $M(a; b)$ est l'**image ponctuelle** de $z = a + bi$.

Au vecteur \vec{V} de coordonnées $(a; b)$, on peut associer le nombre complexe $z = a + bi$.

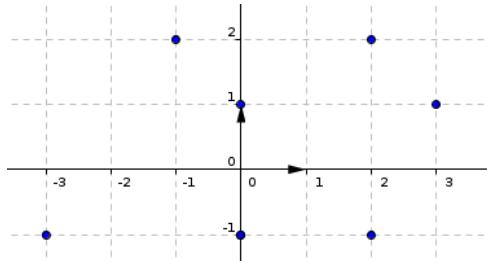
On dit que $z = a + bi$ est l'**affixe** de \vec{V} ou que $\vec{V}(a; b)$ est l'**image vectorielle** de $z = a + bi$.



Exemple : Placer dans le plan complexe, les points d'affixes :

$$z_1 = 2 + 2i ; z_2 = 3 + i ; z_3 = -1 + 2i ; z_4 = 2 - i$$

$$z_5 = i ; z_6 = -i ; z_7 = 1 ; z_8 = -i - 3$$



Lorsqu'on repère un point ou un vecteur par son affixe dans un repère orthonormal direct, on dit qu'on se place dans le plan complexe.

Propriétés :

Si M a pour affixe $z = a + bi$ et si M' a pour affixe $z' = a' + b'i$, avec a, b, a', b' réels, alors :

- le vecteur $\vec{MM'}$ a pour affixe $z' - z = (a' - a) + (b' - b)i$
- $OM = \|\vec{OM}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $MM' = \|\vec{MM'}\| = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2}$
- le milieu I de $[MM']$ a pour affixe $z_I = \frac{z + z'}{2}$

Preuve :

M a pour coordonnées $(a; b)$ et M' a pour coordonnées $(a'; b')$. Les résultats vus en 1ère sur les coordonnées permettent d'écrire :

- $\vec{MM'}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a' - a \\ b' - b \end{pmatrix}$, donc $\vec{MM'}$ a pour affixe $(a' - a) + (b' - b)i = a' - a + b'i - bi = a' + b'i - (a + bi) = z' - z$
 - le milieu I de $[MM']$ a pour coordonnées $\left(\frac{a+a'}{2}; \frac{b+b'}{2}\right)$, donc son affixe est :
- $$z_I = \frac{a+a'}{2} + \frac{i(b+b')}{2} = \frac{a+a'+bi+b'i}{2} = \frac{a+bi+a'+b'i}{2} = \frac{z+z'}{2}$$

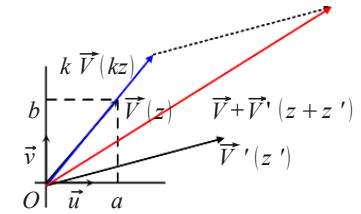
Propriétés :

- Si \vec{V} a pour affixe z et \vec{V}' pour affixe z' , alors $\vec{V} + \vec{V}'$ a pour affixe $z + z'$.
- Si k est un réel, alors $k\vec{V}$ a pour affixe kz .

Preuve :

- Soit $a + bi$ et $a' + b'i$ les formes algébriques de z et z' .

Le vecteur \vec{V} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et le vecteur \vec{V}' a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$.



On sait alors que le vecteur $\vec{V} + \vec{V}'$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \end{pmatrix}$.

Il a donc pour affixe :

$$a + a' + (b + b')i = a + a' + bi + b'i = a + bi + a' + b'i = z + z'.$$

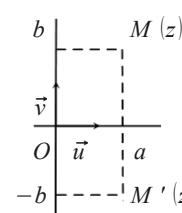
- Si k est un réel, alors on sait que $k\vec{V}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix}$, donc $k\vec{V}$ a pour affixe :

$$ka + kbi = k(a + bi) = kz.$$

Définition :

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $a + bi$.

On appelle **conjugué** de z le nombre complexe noté \bar{z} tel que $\bar{z} = a - bi$.



Si M est le point d'affixe z , le point M' d'affixe \bar{z} est symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

Exemple : Soit $z = 3 + 5i$ et $z' = -2 + 3i$. Calculer :

$$\bar{z} = 3 - 5i$$

$$\bar{z}' = -2 - 3i$$

$$\bar{z} + \bar{z}' = 1 - 8i$$

$$z + z' = 1 + 8i$$

$$\bar{z} + z' = 1 - 8i$$

$$\bar{z} \cdot \bar{z}' = -21 + i$$

$$z \cdot z' = -21 - i$$

$$\bar{z} \cdot z' = -21 + i$$

Propriétés :

Pour tous nombres complexes z et z' , on a :

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $z \cdot \bar{z}$ est un réel positif
- $\bar{z} + z' = \bar{z} + \bar{z}' ; \bar{z} - z' = \bar{z} - \bar{z}' ; \bar{z}z' = \bar{z} \cdot \bar{z}'$

$$\text{• Si } z' \neq 0 \quad \frac{1}{z'} = \frac{1}{\bar{z}} ; \quad \frac{\bar{z}}{z'} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}}.$$

$$\text{• } \text{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} ; \quad \text{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$\text{• } z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z} ; \quad z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$$

Preuve :

Soit les nombres complexes écrits sous la forme algébrique : $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$.

- $\bar{z} = a - bi$ donc $\bar{\bar{z}} = a + bi = z$
- $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - (-b^2) = a^2 + b^2$ donc $z \cdot \bar{z}$ est un réel positif
- $z + z' = a + bi + a' + b'i = (a + a') + (b + b')i$.
Comme $(a + a')$ et $(b + b')$ sont des réels, on obtient : $\overline{z + z'} = (a + a') - (b + b')i = a - bi + a' - b'i = \bar{z} + \bar{z}'$
- $z - z' = a + bi - (a' + b'i) = (a - a') + (b - b')i$.
Comme $(a - a')$ et $(b - b')$ sont des réels, on obtient : $\overline{z - z'} = (a - a') + (b - b')i = a - bi - a' + b'i = \bar{z} - \bar{z}'$
- $zz' = (a + bi)(a' + b'i) = aa' + ab'i + a'b'i + b^2i^2 = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$
Comme $(aa' - bb')$ et $(ab' + a'b)$ sont des réels, on obtient : $\overline{zz'} = (aa' - bb') - (ab' + a'b)i$
D'autre part $\bar{z} \cdot \bar{z}' = (a - bi)(a' - b'i) = aa' - ab'i - a'b'i + b^2i^2 = (aa' - bb') - (ab' + a'b)i = \overline{zz'}$

- Si $z' \neq 0$, $\frac{1}{z'} = \frac{1}{a' + b'i} = \frac{a' - b'i}{(a' + b'i)(a' - b'i)} = \frac{a' - b'i}{a'^2 + b'^2} = \frac{a'}{a'^2 + b'^2} + \frac{-b'}{(a'^2 + b'^2)i}$
Comme $\frac{a'}{a'^2 + b'^2}$ et $\frac{-b'}{a'^2 + b'^2}$ sont des réels, on obtient : $\frac{1}{z'} = \frac{a'}{a'^2 + b'^2} + i \frac{-b'}{a'^2 + b'^2}$
D'autre part $\bar{z}' = a' - b'i$, donc $\frac{1}{z'} = \frac{1}{a' - b'i} = \frac{a' + b'i}{(a' - b'i)(a' + b'i)} = \frac{a' + b'i}{a'^2 + b'^2} = \frac{a'}{a'^2 + b'^2} + \frac{b'}{a'^2 + b'^2}i = \frac{1}{\bar{z}'}$
- Si $z' \neq 0$, $\overline{\frac{z}{z'}} = \overline{z \times \frac{1}{z'}} = \bar{z} \times \overline{\frac{1}{z'}} = \bar{z} \times \frac{1}{z'} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$
- $\frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{a + bi + a - bi}{2} = \frac{2a}{2} = a = \operatorname{Re}(z)$; $\frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{a + bi - (a - bi)}{2i} = \frac{2bi}{2i} = b = \operatorname{Im}(z)$
- $z = \bar{z} \Leftrightarrow a + bi = a - bi \Leftrightarrow a + bi - a + bi = 0 \Leftrightarrow 2bi = 0 \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
- $z = -\bar{z} \Leftrightarrow a + bi = -a + bi \Leftrightarrow 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$

Remarque : La propriété $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}^+$ sera utile pour trouver les formes algébriques d'inverses et de quotients.

Exemple : $\frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+i+2i-1}{4-i^2} = \frac{1+3i}{4+1} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$

2) FORME TRIGONOMÉTRIQUE - MODULE - ARGUMENT

A) FORME TRIGONOMÉTRIQUE

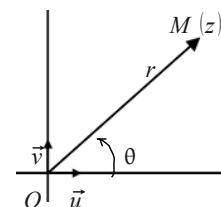
Coordonnées polaires :

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit $M(a; b)$ un point du plan (distinct de O).

On appelle **coordonnées polaires** de M , tout couple de nombres réels (r, θ) tel que :

$$r = OM \quad \text{et} \quad (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$



$$\text{On a alors } r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = r \cos \theta \quad \text{et} \quad b = r \sin \theta$$

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ &= r \cos \theta + ir \sin \theta \\ &= r(\cos \theta + i \sin \theta) \end{aligned}$$

Remarque :

Soit M le point d'affixe x avec $x \in \mathbb{R}$, on a $r = OM = |x|$

Définition :

Tout nombre complexe non nul z peut-être écrit sous la forme :

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad \text{avec } \theta \in \mathbb{R} \text{ et } r \in \mathbb{R}_+^*$$

On dit que $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ est une **forme trigonométrique** de z .

Propriété :

Si deux nombres complexes z et z' sont écrits sous forme trigonométrique $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ et $z' = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$, on a :

$$z = z' \Leftrightarrow r(\cos \theta + i \sin \theta) = r'(\cos \theta' + i \sin \theta') \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' [2\pi] \end{cases}$$

Preuve : Considérons les points M et M' d'affixes respectives z et z' . On peut écrire :

$$z = z' \Leftrightarrow M = M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) = (\vec{u}; \overrightarrow{OM'}) [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' [2\pi] \end{cases}$$

B) MODULE

Définition :

Soit le nombre complexe z de forme algébrique $a + bi$ et soit M le point d'affixe z .

On appelle **module** de z le nombre réel positif $r = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$. On note $r = |z|$.

Remarque :

La notation $|z|$ ne risque pas de prêter à confusion avec la notation de la valeur absolue puisque lorsque x est un nombre réel, on a $r = OM = |x|$.

Pour un réel x , $|x|$ pourra être lu indifféremment "valeur absolue de x " ou "module de x ".

Pour un nombre complexe non réel z , $|z|$ sera lu impérativement "module de z ".

Exemple : - Calculer le module de $z_1 = 3 + 4i$:

$$|z_1| = 5$$

- $z_2 = \sqrt{3} + i$:

$$|z_2| = 2$$

Propriétés :

- Soit \vec{V} un vecteur d'affixe z , on a $|\vec{V}| = |z|$
- Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B , on a $AB = |z_B - z_A|$

Preuve :

Si \vec{V} est un vecteur d'affixe z , on a $\vec{V} = \overrightarrow{OM}$ avec M d'affixe z . Alors $|\vec{V}| = |\overrightarrow{OM}| = OM = |z|$.

Si A et B sont les points d'affixes respectives z_A et z_B , le vecteur \overrightarrow{AB} a pour affixe $z_B - z_A = \dots$

Propriétés :

- | | |
|--------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| • $ z = 0 \Leftrightarrow z = 0$ | • si $z' \neq 0$ $\left \frac{z}{z'} \right = \frac{ z }{ z' }$ |
| • $ -z = z $ | • $z \bar{z} = z ^2$ (on retrouve $z \bar{z} \in \mathbb{R}^+$) |
| • $ \bar{z} = z $ | • si $z \neq 0$ $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{ z ^2}$ |
| • $ z + z' \leq z + z' $ | |
| • $ z \cdot z' = z \cdot z' $ | |
| • si $z \neq 0$ $\left \frac{1}{z} \right = \frac{1}{ z }$ | |

Preuve :

• Soit M le point d'affixe z dans le plan rapporté au repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On peut écrire : $|z| = 0 \Leftrightarrow OM = 0 \Leftrightarrow M = O \Leftrightarrow z = 0$

• Le point M' d'affixe $-z$ est symétrique du point M par rapport à l'origine O .

La symétrie conservant les distances on a : $OM' = OM$ donc $|-z| = |z|$

• Le point M'' d'affixe z est symétrique du point M par rapport à l'axe $(O; \vec{u})$.
La symétrie conservant les distances on a : $OM'' = OM$ donc $|z| = |z|$

• Soit \vec{v} le vecteur d'affixe z et \vec{v}' le vecteur d'affixe z' .
On sait que le vecteur $\vec{v} + \vec{v}'$ a pour affixe $z + z'$.
En utilisant l'inégalité triangulaire, on a $|\vec{v} + \vec{v}'| \leq |\vec{v}| + |\vec{v}'|$ donc $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

• Si z a pour forme algébrique $z = a + bi$ et si z' a pour forme algébrique $z' = a' + b'i$, alors :

$$zz' = (a + bi)(a' + b'i) = aa' + ab'i + a'b'i + bb'i^2 = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$$

Comme $(aa' - bb')$ et $(ab' + a'b)$ sont des réels, on en déduit que :

$$|zz'| = \sqrt{(aa' - bb')^2 + (ab' + a'b)^2} = \sqrt{(aa'^2 + bb'^2 + ab'^2 + a'b^2)} = \sqrt{(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)} = \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{a'^2 + b'^2} = |z| \cdot |z'|$$

• si $z \neq 0$ on a, d'après la propriété précédente :

$$|z| \times \left| \frac{1}{z} \right| = \left| z \times \frac{1}{z} \right| = |1| = 1, \text{ donc } \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \quad \text{et} \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \left| z \times \frac{1}{z'} \right| = |z| \times \left| \frac{1}{z'} \right| = |z| \cdot \frac{1}{|z'|} = \frac{|z|}{|z'|}$$

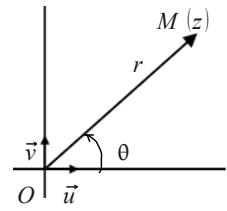
• $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$ (donc $z \in \mathbb{R}^+$)

• si $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

C) ARGUMENT

Définition :

Soit le nombre complexe non nul z de forme algébrique $a+bi$ et soit M le point d'affixe z .
On appelle **argument** de z tout nombre réel θ tel que $\theta = \arg(z)$.



Remarque : θ n'est pas unique, il est défini à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$) c'est-à-dire modulo $[2\pi]$.

Propriétés :

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls d'arguments respectifs θ et θ' . On a :

- $(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') = \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')$ $\arg(zz') = \arg z + \arg z' [2\pi]$
- $\frac{1}{\cos(\theta) + i \sin(\theta)} = \cos(\theta) + i \sin(-\theta)$ $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z [2\pi]$
- $\frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta' + i \sin \theta'} = \cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta')$ $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' [2\pi]$
- $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ $\arg(z^n) = n \arg z [2\pi]$
- $\cos \theta - i \sin \theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$ $\arg(\bar{z}) = -\arg z [2\pi]$
- $-(\cos \theta + i \sin \theta) = \cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi)$ $\arg(-z) = \arg z + \pi [2\pi]$

Preuve :

- On a : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $r \in \mathbb{R}^+$ et $z' = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$ avec $r' \in \mathbb{R}^+$.
On montre facilement que : $(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') = \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')$.
On peut en déduire : $zz' = rr'(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') = rr'[\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')]$.
Comme rr' est un nombre réel positif, on a donc $\arg(zz') = \arg z + \arg z' [2\pi]$
- On montre facilement, en utilisant l'expression conjuguée, que : $\frac{1}{\cos(\theta) + i \sin(\theta)} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$
On peut en déduire que : $\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \times \frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} = \frac{1}{r} \times (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$
Comme $\frac{1}{r}$ est un nombre réel positif, on a donc $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\theta = -\arg z [2\pi]$.
- On a :

$$\frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta' + i \sin \theta'} = (\cos \theta + i \sin \theta) \frac{1}{\cos \theta' + i \sin \theta'} = (\cos \theta + i \sin \theta) \times (\cos(-\theta') + i \sin(-\theta')) = \cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta')$$
Alors $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} \times \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta' + i \sin \theta'} = \frac{r}{r'} \times (\cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta'))$
Comme $\frac{r}{r'}$ est un nombre réel positif, on a donc $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \theta - \theta' = \arg z - \arg z'$
- Soit $P(n)$ la proposition : $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.
Pour $n=0$, on a :
 $(\cos \theta + i \sin \theta)^0 = 1$ et $\cos(0 \times \theta) + i \sin(0 \times \theta) = \cos(0) + i \sin(0) = 1 + 0i = 1$, donc $P(0)$ est vraie.

Supposons $P(n)$ vérifiée pour un entier naturel n , c'est-à-dire $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.

Alors en multipliant les deux membres par $\cos \theta + i \sin \theta$, on obtient :
 $(\cos \theta + i \sin \theta)^{n+1} = [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)](\cos \theta + i \sin \theta) = \cos(n\theta + \theta) + i \sin(n\theta + \theta) = \cos((n+1)\theta) + i \sin((n+1)\theta)$
 $P(n+1)$ est alors justifiée.
On a donc démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.

Lorsque l'on considère un entier négatif, que l'on peut noter $-n$ avec $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire, en utilisant les propriétés déjà démontrées :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^{-n} = \frac{1}{(\cos \theta + i \sin \theta)^n} = \frac{1}{\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)} = \cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta)$$

La proposition est donc vérifiée pour tout $n \in \mathbb{Z}$. $z^n = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n(\cos \theta + i \sin \theta)^n = r^n[\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$

On peut écrire $z^n = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n(\cos \theta + i \sin \theta)^n = r^n[\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$

Comme r^n est un réel positif, on a donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\arg(z^n) = n \arg z [2\pi]$

- Sachant que $\cos(-\theta) = \cos \theta$ et $\sin(-\theta) = -\sin \theta$, on peut écrire : $\cos \theta - i \sin \theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$

Alors $z = r(\cos \theta - i \sin \theta) = r[\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)]$.

Comme r est un réel positif, on en déduit $\arg(\bar{z}) = -\theta = -\arg z [2\pi]$

- Sachant que $\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$ et $\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$, on peut écrire : $-(\cos \theta + i \sin \theta) = -\cos \theta - i \sin \theta = \cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi)$.
Alors $-z = -r(\cos \theta + i \sin \theta) = r[\cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi)]$.
Comme r est un réel positif, on en déduit $\arg(-z) = \theta + \pi = \arg z + \pi$ [2π]

Propriétés :

Soit $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ un nombre complexe écrit sous forme trigonométrique. \bar{z} et $-z$ ont pour formes trigonométriques :
 $\bar{z} = r(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$ et $-z = r(\cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi))$

D) NOTATION EXPONENTIELLE

Remarque :

D'après les résultats précédemment démontrés, l'argument du produit de deux nombres complexes est égal à la somme des arguments de ces deux nombres. C'est-à-dire que la fonction $f : \theta \mapsto \cos \theta + i \sin \theta$ est telle que $f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta')$.
Elle vérifie donc l'équation fonctionnelle caractéristique de la fonction exponentielle.

Notation :

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$ et par conséquent pour $r \in \mathbb{R}_+^*$, on a $r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}$
Cette notation est appelée **notation exponentielle**.

Propriétés :

Les résultats déjà vus s'écrivent, avec la notation exponentielle :

$$\begin{aligned} e^{i\theta} \times e^{i\theta'} &= e^{i(\theta + \theta')} & \frac{1}{e^{i\theta}} &= e^{i(-\theta)} = e^{-i\theta} & \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} &= e^{i(\theta - \theta')} \\ (e^{i\theta})^n &= e^{in\theta} = e^{ni\theta}, \quad n \in \mathbb{Z} & \overline{e^{i\theta}} &= e^{-i\theta} & -e^{i\theta} &= e^{i(\theta + \pi)} \end{aligned}$$

Remarques :

- La propriété $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta + \theta')}$, facile à retenir, permet de retrouver les **formules d'addition** :

$$\cos(\theta + \theta') = \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' \quad \text{et} \quad \sin(\theta + \theta') = \sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta'$$

- La propriété $(e^{i\theta})^2 = e^{2i\theta}$ permet de retrouver les **formules de duplication** :

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \text{et} \quad \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

- On peut vérifier que : $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$. Ce sont les **formules d'EULER**

- La relation $(e^{i\theta})^n = e^{ni\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$ est appelée **formule de MOIVRE**

3) ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ À COEFFICIENTS REELS

Propriété :

L'équation $az^2 + bz + c = 0$, où a, b et c sont des réels (avec $a \neq 0$) admet dans \mathbb{C} deux solutions (éventuellement confondues). Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation. Δ est un nombre réel.

- si $\Delta \geq 0$, les deux solutions sont réelles : $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

- si $\Delta < 0$, les deux solutions sont des nombres complexes non réels, conjugués l'un de l'autre :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Le trinôme $az^2 + bz + c$ peut alors se factoriser sous la forme $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

Preuve :

On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$, où a, b et c sont des réels (avec $a \neq 0$)

$$\text{On peut écrire } az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

- si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions réelles, et deux seulement.

Comme $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, l'équation a donc deux solutions complexes et deux seulement qui sont : $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

- si $\Delta = 0$, l'équation a une solution réelle $z = -\frac{b}{2a}$

- si $\Delta < 0$, $-\Delta > 0$ et on peut écrire : $-\Delta = \sqrt{-\Delta}^2$, donc $\Delta = -\sqrt{-\Delta}^2 = i^2 \sqrt{-\Delta}^2 = (i\sqrt{-\Delta})^2$
on obtient alors :

$$az^2 + bz + c = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(i\sqrt{-\Delta})^2}{4a^2}\right) = a\left(z - \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z - \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$$

La démonstration fait apparaître la factorisation du trinôme $az^2 + bz + c$ sous la forme $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.

On en déduit que l'équation $az^2 + bz + c = 0$ a deux solutions complexes qui sont : $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Ces deux solutions sont des nombres complexes non réels, conjugués l'un de l'autre.