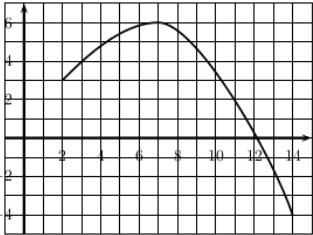


Sens de variation d’une fonction

Ex 1 : Décrire les variations

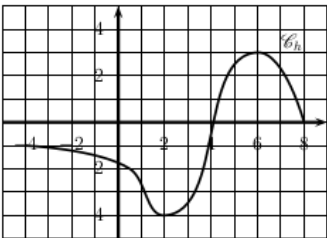
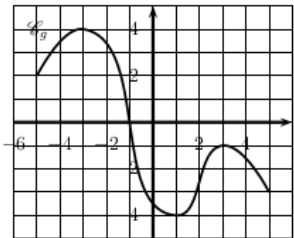
La courbe ci-contre représente graphiquement une fonction f définie sur l’intervalle $[2;14]$.



Décrire les variations de cette fonction.

Ex 2 : Tableau de variations à partir d’un graphique

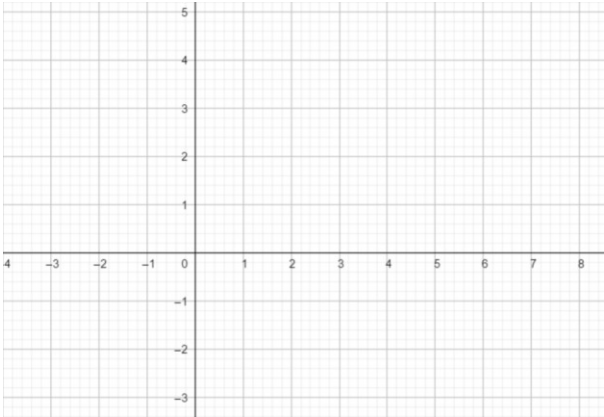
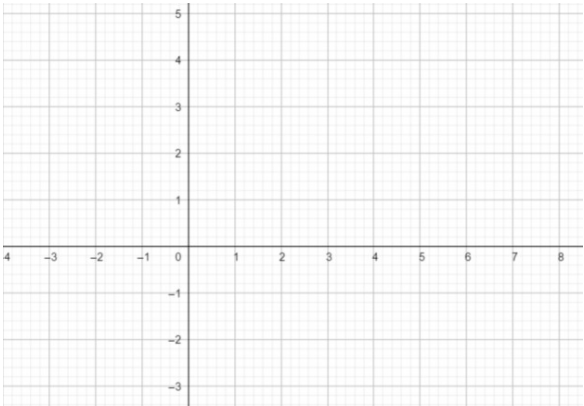
Dresser les tableaux de variations des deux fonctions g et h



Ex 3 : Représentation graphique à partir d’un tableau de variations

x	-3	4	8
f	5		1
		-3	

Tracer deux repères et dessiner deux représentations graphiques possibles de la fonction f .



Ex 4 : Tableau de variations grâce à la calculatrice

Avec la calculatrice, conjecturer les variations des fonctions :
 (On acceptera exceptionnellement dans les tableaux de variations des valeurs approchées à 0,1 près)

$f(x)=-x^2+6x-3$ sur l’intervalle $[0;5]$

$g(x)=x^2-2x-5$ sur l’intervalle $[-3;4]$

$h(x)=-x^2-5x$ sur l’intervalle $[-8;2]$

$i(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ sur l'intervalle $[0, 8; 3, 2]$

$j(x) = x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120$ sur l'intervalle $[1, 8; 5, 1]$

Ex 5 : Tableau de variations à partir de données

f est une fonction définie sur $[-4; 4]$ telle que :

- f est strictement croissante sur $[0; 2]$
- f est strictement décroissante sur $[2; 4]$
- $f(0) = f(4) = 5$ et $f(2) = 10$
- f est paire

Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-4; 4]$.

Ex 6 : Tableau de variations à partir de données

f est une fonction définie sur $[-1; 5]$ telle que :

- f est strictement croissante sur $[-1; 0]$ et $[2; 5]$
- f est strictement décroissante sur $[0; 2]$
- $f(-1) = f(5) = -3$ et $f(0) = 1$
- 2 est un antécédent de -5 par f .

Dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-1; 5]$.

Minimum et maximum

Ex 7 : Attention aux conclusions hâtives ...

Voici un tableau de valeurs d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0; 7]$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	4	-1	-4	-5	-4	-1	4	11

1) a) Peut-on déterminer le maximum de la fonction f grâce au tableau ci-dessus ?

b) On ajoute pour la suite de l'exercice que la fonction f est strictement décroissante sur $[0; 3]$ puis strictement croissante sur $[3; 7]$. Reprendre la question 1)

2) a) Quel est le minimum de la fonction f ?

b) Ce minimum correspond à quelle valeur de x ?

3) a) Quel est le nombre a tel que pour tout nombre x de l'intervalle $[0; 7]$, $f(x) \geq a$?

b) Quel est le nombre b tel que pour tout nombre x de l'intervalle $[0; 7]$, $f(x) \leq b$?

Ex 8 : Vrai ou faux

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Pour chaque implication, dire si elle est vraie ou fausse :

1) Si f est croissante sur $[0; 2]$, alors $f(1) \leq f(2)$.

2) Si $f(0) < f(2)$, alors f est strictement croissante sur $[0; 2]$.

3) Si pour tout réel x , $f(x) \leq 7$, alors la fonction f admet le nombre 7 pour maximum sur $\mathbb{R}$.

4) Si f est croissante sur $[0; 2]$, alors $f(0)$ est le minimum de f sur $[0; 2]$.

Ex 9 : Extremums à partir d'une représentation graphique

1) Dans l'exercice 2 :

a) Quel est le maximum de la fonction g sur l'intervalle $[-5; 5]$? Pour quelle valeur de x ce maximum est-il atteint ?

b) Quel est le minimum de la fonction g sur l'intervalle $[-5; 5]$? Pour quelle valeur de x ce minimum est-il atteint ?

c) Reprendre ces questions sur l'intervalle [0;5].

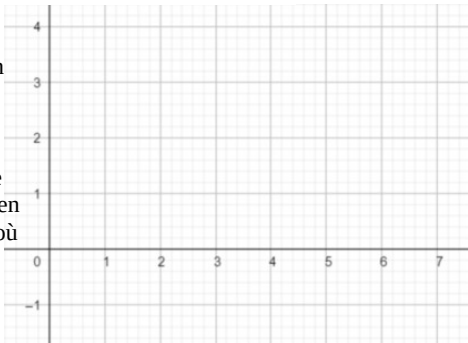
2) Déterminer les extremums de la fonction h sur [-4;8].

Ex 10 : Extremums à partir du tableau de variations

On donne le tableau de variations suivant d'une fonction f .

x	2	3	5	6
f'	0	2	-1	3

1) Tracer un repère et dessiner une représentation graphique possible de la fonction f .



2) Donner le maximum de f sur l'intervalle $[2;6]$ en précisant la valeur de x où il est atteint.

3) Donner le minimum de f sur l'intervalle $[2;6]$ en précisant la valeur de x où il est atteint.

Ex 11 : Extremums, variations et calculatrice

La fonction f est définie sur l'intervalle $[-3;8]$ par $f(x)=3x^2-14x$

1) À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau de valeurs ci-dessous en arrondissant au dixième près.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

2) D'après ce tableau, compléter les valeurs ci-dessous afin de tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'écran de la calculatrice.

Xmin = Xmax =

Ymin = Ymax =

3) a) À l'aide de la calculatrice, déterminer le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[-3;8]$. Arrondir au millièm.

b) En quelle valeur de x est-il atteint ? Arrondir au millièm.

4) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-3;8]$. Écrire des valeurs au millièm près.

5) Calculer le ou les éventuels antécédents de 0. Donner les valeurs exactes.

6) À l'aide de la calculatrice, résoudre l'équation $f(x)=50$. Arrondir au millièm.

Ex 12 : Extremums, variations et calculatrice

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0;8]$ par $f(x)=-7x^2+60x$

1) Faire tracer la courbe représentative, bien cadrée, sur l'écran de la calculatrice.

2) À l'aide de la calculatrice, déterminer le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0;8]$. Arrondir au centièm.

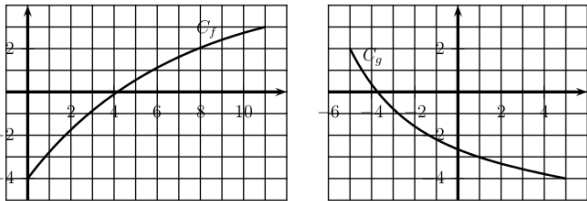
3) Pour quelle valeur de x est-il atteint ? Arrondir au centièm.

4) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;8]$. Écrire des valeurs au centièm près.

Comparer les images de deux nombres

Ex 13 : Comparer des images à partir d’une courbe

Les courbes ci-dessous représentent graphiquement deux fonctions f et g .



Compléter ci-dessous avec les mots croissante ou décroissante et avec les signes $>$ ou $<$, et tracer des traits dans les deux repères ci-dessous.

1) La fonction f est sur l’intervalle $[\dots ; \dots]$.

$1 \dots 3$	et	$f(1) \dots f(3)$
$7 \dots 5$	et	$f(7) \dots f(5)$
$9,29 \dots 9,3$	et	$f(9,29) \dots f(9,3)$

2) La fonction g est sur l’intervalle $[\dots ; \dots]$.

$-2 \dots -1$	et	$g(-2) \dots g(-1)$
$2 \dots 4$	et	$g(2) \dots g(4)$
$1,03 \dots 1$	et	$g(1,03) \dots g(1)$

Ex 14 : Comparer des images à partir d’un tableau de variations

Compléter :

$f(-7) \dots f(-5)$

$f(0) \dots f(2)$

$f(8) \dots f(6)$

$f(-1,3) \dots f(-1,32)$

x	-9	-2	3	9
f	10		4	-8

Ex 15 : Comparer des images à partir des variations

On donne les informations ci-dessous sur une fonction f définie sur l’intervalle $[-10;15]$.

– Sur l’intervalle $[-10;4]$, la fonction f est strictement croissante ;

– sur l’intervalle $[4;15]$, la fonction f est strictement décroissante.

Compléter ci-dessous avec les signes $>$ ou $<$.

$f(-6) \dots f(-9)$; $f(1) \dots f(3)$

$f(9) \dots f(11)$; $f(14) \dots f(13)$

Ex 16 : Utilisation de la calculatrice

La fonction f est définie sur l’intervalle $[-7;3]$ par $f(x)=x^3+20x^2+50x-300$

1) À l’aide de la calculatrice, dresser le tableau de variation de la fonction f sur l’intervalle $[-7;3]$. Arrondir au dixième près.

2) Sans aucun calcul, compléter ci-dessous avec les signes $>$ ou $<$.

$f(-5,5) \dots f(-6)$; $f(1) \dots f(1,05)$

$f(-2,99) \dots f(-2,9)$; $f(2,31) \dots f(2,3)$

Ex 17 :

Soit une fonction f croissante sur l’intervalle $[-3;7]$.
Quel est l’ensemble des nombres dont les images par f sont supérieures au sens strict à $f(2)$?

Ex 18 :

On donne ci-dessous le tableau de variations d’une fonction g

x	-4	6
g	2	-5

Quel est l’ensemble des nombres dont les images par g sont inférieures au sens large à $g(1)$?

Fonctions affines

Ex 19 : Vrai ou faux

Soit f une fonction affine.
Pour chaque implication, dire si elle est vraie ou fausse :

1) Si $f(-2)<f(2)$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) Si $f(-2)=f(2)$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.

3) Si f est une fonction linéaire et que $f(-2)<0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Ex 20 : Tableau de variations et tableau de signes

Déterminer le tableau de variations et le tableau de signes des fonctions affines ci-dessous :

1) $f : x \mapsto 3x-7$

2) $g : x \mapsto 3(2-5x)$

3) $h : x \mapsto 2x-2(1-4x)$

4) $i : x \mapsto \frac{x-3}{5}$

5) $j : x \mapsto (3-\pi)x+\sqrt{2}$

Ex 21 : Utiliser le taux de variations

Dans chacun des cas, déterminer le sens de variations de la fonction affine vérifiant :

1) $f(2)=7$ et $f(5)=10$

2) $f(8)=2$ et $f(1)=7$

Ex 22 : Utiliser le taux de variations

$f : x \mapsto 2x+b$ ($b \in \mathbb{R}$) est une fonction affine . Sans calculer b , déterminer :

1) $f(15)-f(5)$

2) $f(-3)-f(0)$

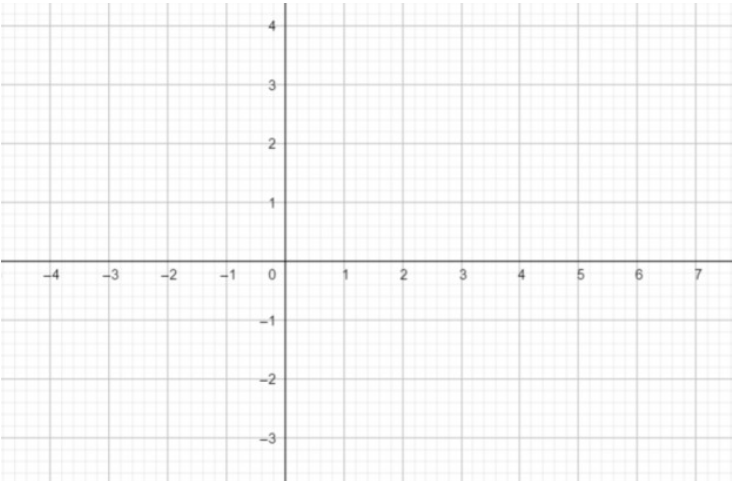
Ex 23 : Fonction affine par morceaux

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq -1 \\ 2x+2 & \text{si } x \in [-1;1[\\ -x+5 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1) Dresser le tableau de variations de la fonction f .

2) Donner la représentation graphique de la fonction f .



3) Déterminer les extremums de f sur :
a) $[-1;1]$

b) $[-1;6]$

c) $[-4;7]$

Fonctions de références

Ex 24 : Comparer des nombres en utilisant les variations

En utilisant le sens de variation des fonctions de référence, comparer les nombres :

1) $2,4^2$ et $2,3^2$

2) $(-1,9)^2$ et $(-1,8)^2$

3) $\frac{1}{9}$ et $\frac{1}{11}$

4) $\frac{1}{-5}$ et $\frac{1}{-3}$

5) $(-4)^3$ et $(-4,1)^3$

6) $\sqrt{7}$ et $\sqrt{8}$

Ex 25 : Comparer sans calculatrice

Comparer les nombres suivants sans utiliser la calculatrice :

1) $(\pi-5)^2$ et $(\pi-7)^2$

2) $\frac{1}{-3}$ et $-\frac{1}{4}$

3) 7 et $\sqrt{48}$

4) $(-3)^3$ et $0,11^3$

5) $\frac{1}{\sqrt{2}-5}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}-7}$

$$6) (\sqrt{11}-1)^2 \quad \text{et} \quad (\sqrt{11}-2)^2$$

Ex 26 : Encadrer $f(x)$

Soit f la fonction définie sur $[1;2]$ par $f(x)=\sqrt{-3x+7}$.

En utilisant le sens de variation des fonctions de référence, démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1;2]$, on a $1 \leq f(x) \leq 2$.

$$2) g(x)=\sqrt{x^2+3} \quad \text{sur} \quad [0;1]$$

$$3) h(x)=(x-3)^2+10 \quad \text{sur} \quad [-1;3]$$

Ex 27 : Déterminer le sens de variations d'une fonction

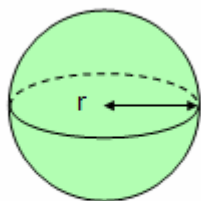
En utilisant le sens de variations des fonctions de référence, déterminer les variations des fonctions ci-dessous :

$$1) f(x)=\frac{1}{x^3} \quad \text{sur} \quad]0;+\infty[$$

$$4) i(x)=\frac{1}{4-x} \quad \text{sur} \quad]4;+\infty[$$

Ex 28 : Fonction cube et volume d'une boule

1) Quel est le sens de variation de la fonction cube sur $[0; +\infty[$?

Volume d'une boule

2) En déduire le sens de variation de la fonction qui au rayon d'une boule associe son volume.

$$\text{volume} = \frac{4}{3} \pi \times r^3$$

3) Une boule a un rayon compris entre 10 et 15 cm.
Encadrer (en arrondissant à l'unité) le plus précisément possible son volume.

2) Reprendre les questions en considérant cette fois la fonction f qui, à un réel x de $[0;14]$, associe l'aire de AMN et la fonction g qui à un réel x de $[0;14]$, associe l'aire de MBCP.

Ex 29 : Géométrie et fonctions de référence

On considère un segment $[AB]$ de longueur 14 cm. Sur ce segment, on place un point M puis on trace un triangle équilatéral AMN et un carré MBCP.

On pose $x=AM$. Ainsi $0 \leq x \leq 14$.

1) On considère la fonction f qui, à un réel x de $[0;14]$, associe le périmètre de AMN et la fonction g qui à un réel x de $[0;14]$, associe le périmètre de MBCP.

a) Déterminer les sens de variations de f et g sans utiliser leurs expressions algébriques.

b) Exprimer $f(x)$ et $g(x)$, puis retrouver les résultats de la question précédente.

Modéliser des situations de la vie courante

Ex 30 : Comète

Une comète à trajectoire parabolique s’approche de la terre . On suppose que la distance (en millions de km) entre la comète et la terre est une fonction d du temps t donnée par :

$$d(t)=(t-2)^2+10$$

où t est le temps (en années) écoulé depuis l’instant 0.

1) Démontrer que la fonction d est strictement décroissante sur $[0;2]$, puis strictement croissante sur $[2;10]$.



2) Dresser le tableau de variations de d sur l’intervalle $[0;10]$.

3) Quelle est la distance minimale entre cette comète et la terre ?

Ex 31 : Apiculteur

Un apiculteur produit du miel qu’il vend au marché. L’expérience lui a montré que si x (où $x\in[1;40]$) est le prix de vente, du kg de miel, le nombre d’acheteurs vaut $n(x)=200-5x$. On suppose que chaque acheteur achète exactement un kg de miel et que le coût de production d’un kg de miel est de 8 euros.

1) Montrer que le bénéfice s’écrit $b(x)=-5(x-24)^2+1280$



2) a) Démontrer que la fonction b est strictement croissante sur $[1;24]$ et strictement décroissante sur $[24;40]$.

b) Dresser le tableau de variations de b sur l'intervalle $[1;40]$

c) En déduire, pour quel prix au kg le bénéfice obtenu est maximum et combien vaut ce bénéfice maximal ?

Ex 32 : Bénéfice maximum

Une entreprise produit et commercialise des briques en terre cuite et des tuiles. Chaque semaine, elle limite sa production à 13 tonnes.

Elle vend son produit 40000 euros la tonne et son coût total de production, en milliers d'euros, est modélisé par c définie sur $[0;13]$ par $c(x) = x^2 + 25x + 36$.

1) On note $b(x)$ le bénéfice.
Donner une expression de $b(x)$ en fonction de x .

2) Conjecturer avec la calculatrice la production qui engendre un coût pour l'entreprise et la production qui rapporte un bénéfice maximum.

Algorithme - Python



Ex 33 :

Un maire s'intéresse à l'évolution de la population de sa ville.
Une étude a permis d'établir que la population de l'année $2017+n$ peut être estimée par la formule :

$$p(n) \text{ où } p \text{ est la fonction définie sur } [0;23] \text{ par } p(x) = 2x^3 - 132x^2 + 2898x + 9412$$

1) Déterminer la population en 2023

2) On admet que la fonction p admet un maximum M sur $[0;23]$ pour une valeur entière N et que la fonction est croissante jusqu'à cette valeur N .

Compléter le programme écrit en Python ci-dessous afin qu'il affiche M et l'année où la population sera maximum :

```

1 def p(k):
2     return(2*k**3-132*k**2+2898*k+9412)
3 M=.....
4 N=.....
5 for i in range(.....,.....):
6     if (p(i)>M):
7         M=.....
8         N=.....
9 print("le maximum est",M,"atteint en",.....)
```



3) Qu'affiche le programme ?

