

VARIATIONS ET EXTREMUMS

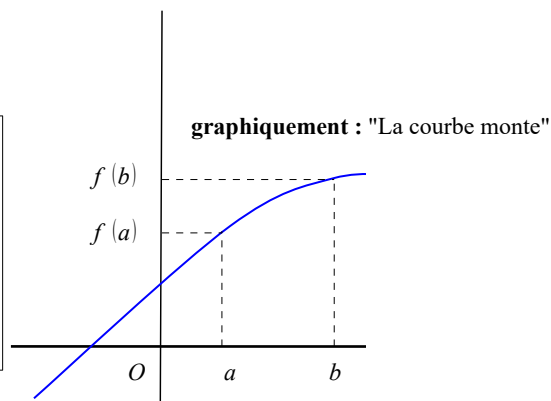
1) SENS DE VARIATIONS

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- On dit que f est **croissante** sur I , lorsque pour tous réels a et b de I , tels que $a < b$, on a $f(a) \leq f(b)$.

- On dit que f est **strictement croissante** sur I , lorsque pour tous réels a et b de I , tels que $a < b$, on a $f(a) < f(b)$.



Une fonction strictement croissante est forcément croissante.

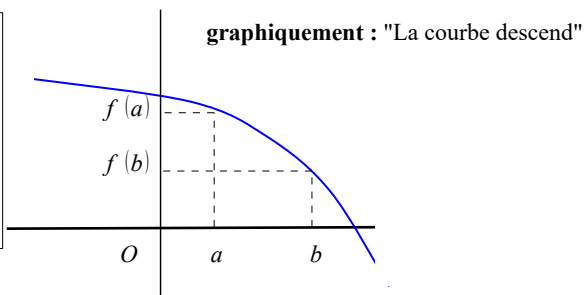
Une fonction croissante **conserve l'ordre**.

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- On dit que f est **décroissante** sur I , lorsque pour tous réels a et b de I , tels que $a < b$, on a $f(a) \geq f(b)$.

- On dit que f est **strictement décroissante** sur I , lorsque pour tous réels a et b de I , tels que $a < b$, on a $f(a) > f(b)$.



Une fonction strictement décroissante est forcément décroissante.

Une fonction décroissante **change l'ordre**.

Remarques :

- f est **monotone** (resp. **strictement monotone**) sur I , lorsque f est soit croissante (respectivement strictement) sur I , soit décroissante (respectivement strictement) sur I .

- On ne parle de croissance ou de décroissance que sur un intervalle.

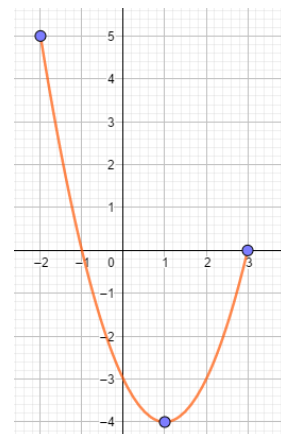
- Etudier les variations d'une fonction, c'est préciser les intervalles sur lesquels la fonction est monotone.

On résume ces résultats dans un tableau appelé **tableau de variations**.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $[-2; 3]$ par la courbe représentée ci-contre.

On résume les variations de f dans le tableau :

x	-2	1	3
f	5	-4	0



2) EXTREMUMS

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , x_m et x_M deux réels de I . On dit que :

- f admet **un minimum** sur I en x_m , si pour tout réel x de I , $f(x_m) \leq f(x)$
- f admet **un maximum** sur I en x_M , si pour tout réel x de I , $f(x_M) \geq f(x)$

Si f admet un minimum ou un maximum, on dit que f admet **un extremum**.

Exemple :

Pour la fonction de l'exemple précédent, -4 est le minimum sur $[-2; 3]$ atteint pour $x = 1$.

Remarque :

Une fonction n'admet pas nécessairement de maximum ou de minimum sur un intervalle. (En particulier, sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert)

3) VARIATIONS DES FONCTIONS AFFINES

Propriété :

Soit la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ où a et b sont des réels fixés.

Pour tous réels u et v distincts, on a :

$$\frac{f(u) - f(v)}{u - v} = a$$

Ce quotient s'appelle le **taux d'accroissement** de f entre u et v .

Preuve :

Pour tous réels u et v distincts, on a :

$$\frac{f(u) - f(v)}{u - v} = \frac{au + b - (av + b)}{u - v} = \frac{au - av}{u - v} = \frac{a(u - v)}{u - v} = a$$

Propriété :

Soit la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ où a et b sont des réels fixés.

- Si $a > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a < 0$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Preuve :

Soit deux réels u et v tels que $u < v$

- Si $a > 0$, alors :

$$\begin{aligned} au &< av \\ \Rightarrow au + b &< av + b \\ \Rightarrow f(u) &< f(v) \end{aligned}$$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- Si $a < 0$, alors :

$$\begin{aligned} au &> av \\ \Rightarrow au + b &> av + b \\ \Rightarrow f(u) &> f(v) \end{aligned}$$

Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Pour résumer :

$a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
f		0	
$f(x)$	—	0	+

$a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
f		0	
$f(x)$	+	0	—

4) VARIATIONS DES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

A) LA FONCTION CARRÉ

Propriété :

- La fonction carrée $f : x \mapsto x^2$ est **strictement décroissante** sur $]-\infty ; 0]$.
- La fonction carrée $f : x \mapsto x^2$ est **strictement croissante** sur $[0 ; +\infty[$.

Preuve :

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. On a alors :

$$f(a) - f(b) = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

1er cas: $a < b \leq 0$

$a - b < 0$ puisque $a < b$,
 $a + b < 0$ puisque a et b sont négatifs ou nuls.

D'après la règle des signes d'un produit, on en déduit que :

$$\begin{aligned} (a-b)(a+b) &> 0 \\ \Rightarrow f(a) - f(b) &> 0 \\ \Rightarrow f(a) &> f(b) \end{aligned}$$

La fonction carrée est donc strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$.

2ème cas: $0 \leq a < b$

$a - b < 0$ puisque $a < b$,
 $a + b > 0$ puisque a et b sont positifs ou nuls.

D'après la règle des signes d'un produit, on en déduit que:

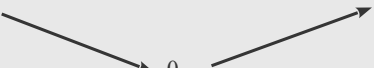
$$\begin{aligned} (a-b)(a+b) &< 0 \\ \Rightarrow f(a) - f(b) &< 0 \\ \Rightarrow f(a) &< f(b) \end{aligned}$$

La fonction carrée est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Remarques :

- Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés
- Deux nombres négatifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs carrés

Le **tableau de variations** de la fonction carrée est donc:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f			

La fonction carrée admet un minimum en 0, de valeur 0.

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0 \text{ et } 0^2 = 0$$

B) LA FONCTION INVERSE

Propriété :

- La fonction inverse $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est **strictement décroissante** sur $]-\infty; 0[$.
- La fonction inverse $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est **strictement décroissante** sur $]0; +\infty[$.

Preuve :

Soit deux réels a et b de l'ensemble de définition de la fonction inverse $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ tels que $a < b$. On a alors:

$$f(a) - f(b) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$$

1er cas: $a < b < 0$

$b - a > 0$ puisque $a < b$,
 $ab > 0$ puisque c'est le produit de deux nombres de même signe.

$$\begin{aligned} \text{On en déduit que : } \frac{b-a}{ab} &> 0 \\ \Rightarrow f(a) - f(b) &> 0 \\ \Rightarrow f(a) &> f(b) \end{aligned}$$

La fonction inverse est donc strictement décroissante sur $]-\infty; 0[$.

2ème cas: $0 < a < b$

Démonstration identique

Remarques :

- Deux nombres strictement positifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses.
- Deux nombres strictement négatifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses.

Le **tableau des variations** de la fonction inverse est donc:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f			

La double barre verticale en 0 est là pour signifier que la fonction inverse n'est pas définie en 0.

C) LA FONCTION VALEUR ABSOLUE

Propriété :

- La fonction valeur absolue $f : x \mapsto |x|$ est **strictement décroissante** sur $] -\infty ; 0]$.
- La fonction valeur absolue $f : x \mapsto |x|$ est **strictement croissante** sur $[0 ; +\infty [$.

Le **tableau de variations** de la fonction valeur absolue est donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f			

D) LA FONCTION RACINE CARRÉE

Propriété :

La fonction racine carrée $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est **strictement croissante** sur $[0 ; +\infty [$.

Preuve :

Soit deux réels a et b de l'ensemble de définition de la fonction racine carrée $f : x \mapsto \sqrt{x}$ tels que $a < b$. On a alors :

$$f(a) - f(b) = \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

Or $a < b \Leftrightarrow a - b < 0$ et $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$

On en déduit que : $f(a) - f(b) < 0 \Rightarrow f(a) < f(b)$

La fonction racine carrée est donc strictement croissante sur $[0 ; +\infty [$.

Le **tableau des variations** de la fonction racine carrée est donc :

x	0	$+\infty$
f		

E) LA FONCTION CUBE

Propriété :

La fonction cube $f : x \mapsto x^3$ est **strictement croissante** sur $[-\infty ; +\infty [$.

Le **tableau des variations** de la fonction cube est donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f			