

ARITHMÉTIQUE

1) LES ENTIERS NATURELS ET LES ENTIERS

Définitions :

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des **nombre entiers naturels**. $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des **nombre entiers** (ou **nombre entiers relatifs**) $\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$

Remarque : La somme, la différence et le produit de deux entiers sont des entiers.

Définition : division euclidienne dans $\mathbb{N}$

Soit deux entiers a et b (avec $b \neq 0$).
On peut écrire a de façon unique sous la forme :

$$a = b \times q + r \quad (\text{où } q \in \mathbb{N} \text{ et } r \in \mathbb{N}, \text{ tel que } 0 \leq r < b)$$

q est appelé **quotient**.

r est appelé **reste**.

Exemples :

- $29 = 7 \times 3 + 8$ n'est pas la division euclidienne de 29 par 3 car $8 \geq 3$

- La division euclidienne de 29 par 3 est : $29 = 9 \times 3 + 2$

9 est le quotient et 2 est le reste (on a bien $2 < 3$)

2) MULTIPLES ET DIVISEURS

Définitions :

Soit deux entiers n et p .
Si le reste de la division euclidienne de n par p est égal à 0, on dit que :

- p est un **diviseur** de n ou que n est **divisible** par p .
- n est un **multiple** de p .

Il existe un entier q tel que $n = p \times q$

Exemple : $45 = 9 \times 5$. Donc 9 est un diviseur de 45 et 45 est un multiple de 9.

Remarques :

- Tout nombre entier est un multiple de 1 et de lui-même (par exemple : $3 = 1 \times 3$ ou $5 = 5 \times 1$).

- L'entier 0 est un multiple de tout nombre entier n , car $0 = 0 \times n$.

- 0 n'admet qu'un seul multiple : 0

- Tout nombre entier n non nul admet une infinité de multiples: $0, n, 2n, 3n, \dots$ (c'est à dire les entiers $k \times n$, où $k \in \mathbb{Z}$)

Propriété :

Soit a, n et m trois entiers, tels que n et m sont des multiples de a .

La somme $n+m$, la différence $m-n$ et le produit $n \times m$ sont aussi des multiples de a .

Preuve (pour la somme) :

n et m sont des multiples de a . Il existe donc deux entiers k et k' tels que $n = k \times a$ et $m = k' \times a$

On a alors :

$$n + m = k \times a + k' \times a = (k + k') \times a = K \times a \quad \text{où } K = k + k'$$

Or $K \in \mathbb{Z}$ (car la somme de deux entiers est un entier)

On en déduit que $n+m$ est un multiple de a .

Exemple :

324 et 111 sont des multiples de 3.

$324 + 111$, $324 - 111$ et 324×111 sont donc aussi des multiples de 3.

3) NOMBRES PAIRS ET NOMBRES IMPAIRS

Propriété et définition :

Soit un entier n .

- Si n est divisible par 2 (c'est à dire un multiple de 2), on dit que n est **pair**.

$$\text{Il existe } k \in \mathbb{Z}, \text{ tel que } n = 2k$$

- Si n n'est pas pair, il est **impair**.

$$\text{Il existe } k \in \mathbb{Z}, \text{ tel que } n = 2k + 1$$

Critère de parité :

Un nombre est pair si et seulement si son chiffre des unités est pair.

Propriété :

- La somme de deux nombres pairs est un nombre pair.

- La somme de deux nombres impairs est un nombre pair.

- La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair.

Preuve (pour la somme de deux nombres impairs) :

Soit n et n' deux nombres impairs.

Il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$, tels que $n = 2k + 1$ et $n' = 2k' + 1$.

On a alors :

$$n + n' = 2k + 1 + 2k' + 1 = 2k + 2k' + 2 = 2(k + k' + 1) = 2K \quad \text{où } K = k + k' + 1$$

Comme $K \in \mathbb{Z}$, $n + n'$ est un nombre pair.

Propriété :

Soit un entier n .

- Si n est pair, alors n^2 est pair.

- Si n est impair alors n^2 est impair.

Preuve :

Si n est pair, il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $n = 2k$.

On a alors :

$$n^2 = (2k)^2 = 2k \times 2k = 2 \times (2k^2) = 2K \quad \text{où } K = 2k^2$$

Comme $K \in \mathbb{Z}$, n^2 est pair.

Si n est impair, il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $n = 2k + 1$.

On a alors :

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2K + 1 \quad \text{où } K = 2k^2 + 2k$$

Comme $K \in \mathbb{Z}$, n^2 est impair.

Exemples :

- 24 est pair donc $24^2 = 576$ est pair.

- 781^8 est un nombre impair.

En effet, 781 est impair, donc 781^2 est impair, donc $(781^2)^2$ est impair et enfin $((781^2)^2)^2 = 781^8$ est impair.

Remarque :

Les réciproques sont aussi vraies :

- si n^2 est pair, alors n est pair.

- si n^2 est impair, alors n est impair.

4) NOMBRES PREMIERS ET FRACTIONS IRRÉDUCTIBLES

Définition :

Un entier naturel est **premier** s'il n'admet que deux diviseurs positifs : 1 et lui même.

Un nombre qui n'est pas premier est **composé**.

Remarques :

- 1 n'est pas un nombre premier.

- 0 n'est pas un nombre premier car il est divisible par tout entier non nul.

Exemple :

- 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 sont des nombres premiers.

- 45 n'est pas un nombre premier car $45 = 9 \times 5$.

Propriété : (admise)

Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 se décompose en produit de facteurs premiers et cette décomposition est unique.

Exemple :

450	2
225	3
75	3
25	5
5	5
1	

On obtient :

$$450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$$

17787	3
5929	7
847	7
121	11
11	11
1	

On obtient :

$$17787 = 3 \times 7^2 \times 11^2$$

On cherche les diviseurs premiers dans l'ordre croissant.

Définition :

On dit qu'une fraction est **irréductible** lorsque son numérateur et son dénominateur n'ont pas de diviseur commun autre que 1.

Exemple : En utilisant la décomposition en produit de facteurs premiers.

$$\frac{450}{17787} = \frac{2 \times 3^2 \times 5^2}{3 \times 7^2 \times 11^2} = \frac{2 \times 3 \times 5^2}{7^2 \times 11^2} = \frac{150}{5929}$$