

Les principaux ensembles de nombres**Ex 1 : Compléter par $\in$ ou $\notin$**

1) $5 \dots \mathbb{N}$; $5 \dots \mathbb{Z}$; $5 \dots \mathbb{ID}$; $5 \dots \mathbb{Q}$; $5 \dots \mathbb{R}$

2) $-\frac{45}{9} \dots \mathbb{N}$; $-\frac{45}{9} \dots \mathbb{Z}$; $-\frac{45}{9} \dots \mathbb{ID}$; $-\frac{45}{9} \dots \mathbb{Q}$; $-\frac{45}{9} \dots \mathbb{R}$

3) $\frac{7}{8} \dots \mathbb{N}$; $\frac{7}{8} \dots \mathbb{Z}$; $\frac{7}{8} \dots \mathbb{ID}$; $\frac{7}{8} \dots \mathbb{Q}$; $\frac{7}{8} \dots \mathbb{R}$

Ex 2 : Vrai ou faux

	$\in \mathbb{N}$	$\in \mathbb{Z}$	$\in \mathbb{ID}$	$\in \mathbb{Q}$	$\in \mathbb{R}$
$\frac{5}{3} - \frac{7}{3}$					
$\sqrt{7}$					
$2,8 \times 10^5$					
3×10^{-7}					
$\frac{\pi}{5}$					
$3 - \sqrt{5 \times 8 - 4}$					
$\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4}\right) \times 24$					

Ex 3 : Nombres décimauxEntourer les nombres rationnels qui appartiennent à $\mathbb{ID}$:

$$\frac{5}{2} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{10}{26} \quad -\frac{45}{25} \quad \frac{47}{20} \quad -\frac{12}{5} \quad -\frac{28}{3}$$

Ex 4 : Nombres rationnelsEntourer les réels qui appartiennent à $\mathbb{Q}$:

$$8^{456} \quad \frac{\sqrt{3}}{7} \times \frac{\sqrt{3}}{7} \quad \sqrt{7} + 2 \quad \frac{5\pi}{7\pi} \quad \frac{\pi}{1000} \quad \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{121}} \quad \frac{3}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} \quad 7,5$$

Ex 5 : Nombres rationnels et développement décimal périodique

1) Tout nombre rationnel admet un développement décimal périodique à partir d'un certain rang.

Par exemple : $\frac{13193}{49950} = 0,26\mathbf{412412412}\dots$

Mettre en évidence cette propriété avec les nombres rationnels ci-dessous : (utiliser XCAS)

$$\frac{45}{17} = \quad \frac{458}{784} =$$

2) Réciproquement, tout développement décimal illimité périodique correspond à l'écriture d'un rationnel.

a) Compléter : $y = 0,00723723723\dots$

$$\Rightarrow 1000y = 7,23723723723\dots$$

$$\Rightarrow 1000y = 7,23 + y$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{7,23}{999}$$

b) En déduire l'écriture fractionnaire de $4,24723723723\dots$ **Ex 6 : Démonstration par l'absurde : $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel**Compléter la démonstration ci-dessous pour montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ Supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. $\sqrt{2} > 0$, il existe donc $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$, tel que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, où $\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible.

On a alors :

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \quad (1)$$

On en déduit que p^2 est un nombre

Le carré d'un nombre impair étant impair, p est donc nécessairement pair.

(En effet : $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$)

Comme p est pair, il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que :

.....

En égalisant (1) et (2), on obtient :

.....

Comme $n^2 \in \mathbb{N}$, on en déduit que q^2 est pair, et donc que q est pair.

.....

Ex 7 : Démonstration par l'absurde : $\frac{1}{3}$ n'est pas un décimal

Compléter la démonstration ci-dessous pour montrer que $\frac{1}{3} \notin \text{ID}$

Supposons que $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal.

Comme $0 < \frac{1}{3} < 1$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$, tels que :

.....

.....

Or 10^p n'est pas divisible par 3 .

(En effet, les seuls diviseurs premiers de 10^p sont 2 et 5)

.....

Ex 8 :

Soit $A = 5 - \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$ et $B = \sqrt{y} - \frac{2}{4} + 2,7$

1) Trouver $x \in \mathbb{Z}$, tel que $A \in \mathbb{N}$

2) Trouver $x \in \mathbb{Z}$, tel que $A \in \text{ID} \setminus \mathbb{Z}$

3) Trouver $y \in \mathbb{R}$, tel que $B \in \mathbb{N}$

4) Trouver $y \in \mathbb{N}$, tel que $B \in \text{ID} \setminus \mathbb{N}$

Ex 9 : Logique : Vrai ou faux

Justifier par une démonstration si la réponse est « vrai » ou par un contre exemple si la réponse est « faux ».

1) L'inverse d'un nombre décimal non nul est toujours un nombre décimal.

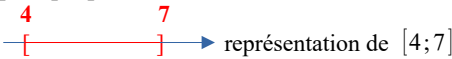
2) L'inverse d'un nombre rationnel non nul est toujours un nombre rationnel.

3) La somme de deux nombres décimaux est toujours un nombre décimal.

4) Le produit de deux nombres rationnels est toujours un nombre rationnel.

Intervalles

Pour tous les exercices sur les intervalles, il ne faut pas hésiter à utiliser la droite des réels pour représenter les intervalles, ce qui peut être très pratique pour les intersections et les réunions d'intervalles.



Ex 10 : QCM

Dans chaque question, déterminer la (ou les) bonne(s) réponses.

1) L'intervalle $]1;3]$:

a) est borné	b) est ouvert en 1	c) est ouvert en 3	d) contient une infinité de nombres réels
---------------	---------------------	---------------------	--

2) L'intervalle $] -\infty;5[$:

a) est borné	b) contient le nombre 5	c) est ouvert en 5	d) s'écrit avec le nombre réel $-\infty$
---------------	--------------------------	---------------------	---

3) L'ensemble $[0;1[\cup]1;+\infty[$

a) contient 0	b) contient 1	c) est un intervalle	d) est l'intersection des intervalles $[0;1[$ et $]1;+\infty[$
----------------	----------------	-----------------------	---

Ex 11 : Compléter par $\in$ ou $\notin$

$-\frac{1}{5} \dots]-5;0[$	$-4 \dots]-\infty;-4[$	$10^{-7} \dots]-\infty;0[$
$\frac{1}{3} \dots [0;0,33]$	$5^0 \dots \left] \frac{1}{5};1 \right]$	$-3,14 \dots]-5;-\pi]$
$2 \dots [1;3]$	$4 \dots \mathbb{R} \setminus [1;4[$	$\pi-3 \dots \mathbb{R}^+$
$3 \dots]-\infty;3[\cup]3;5[$	$-7 \dots \mathbb{N}$	$1 \dots [1;5] \cup]3;7]$

Ex 12 : Intervalles vers inégalités

Compléter avec des inégalités :

$x \in [-7;3] \Leftrightarrow \dots$	$x \in]-\infty;4[\Leftrightarrow \dots$
$x \in]-\infty;7[\Leftrightarrow \dots$	$x \in [-2;+\infty[\Leftrightarrow \dots$
$x \in]0;3[\Leftrightarrow \dots$	$x \in [2;13[\Leftrightarrow \dots$

Ex 13 : Inégalités vers intervalles

Compléter avec des intervalles :

$-2 < x \leq 7 \Leftrightarrow \dots$	$x \geq -4 \Leftrightarrow \dots$
$12 > x \Leftrightarrow \dots$	$5 \geq x > 1 \Leftrightarrow \dots$
$x \geq 1$ et $x \leq 4 \Leftrightarrow \dots$	$x < 0 \Leftrightarrow \dots$

Ex 14 :

Compléter les phrases suivantes :

- 1) L'ensemble de tous les nombres réels négatifs s'écrit
- 2) L'ensemble de tous les nombres réels strictement positif s'écrit
- 3) L'ensemble de tous les nombres réels strictement compris entre 7 et 9 s'écrit
- 4) L'ensemble vide s'écrit
- 5) L'ensemble ne contenant que -2 et 2 s'écrit

Ex 15 : Inégalités vers intervalles

Compléter avec des intervalles :

$-1 < x < 7 \Leftrightarrow \dots$
$x \leq 7 \Leftrightarrow \dots$
$6x+4 \leq 0 \Leftrightarrow \dots$
$-6x+9 > 0 \Leftrightarrow \dots$
$\frac{x}{3} > 0 \Leftrightarrow \dots$

Ex 16 : Réunion et intersection

Compléter les égalités suivantes :

$]-\infty; 2] \cap [1; 6[= \dots$
$]-\infty; 2] \cup [1; 6[= \dots$
$]-5; 0] \cap]-1; 1[= \dots$
$]-5; 0] \cup]-1; 1[= \dots$
$[-5; 2] \cap [2; +\infty[= \dots$
$[-5; 2] \cup [2; +\infty[= \dots$
$]0; 4] \cap [4; 7[= \dots$
$]0; 4] \cup [4; 7[= \dots$
$]-\infty; 5] \cap [-3; 0[= \dots$
$]-\infty; 5] \cup [-3; 0[= \dots$

Ex 17 : « ou » et « et »

Compléter les phrases suivantes :

- 1) L'ensemble des réels x tels que $x \geq 3$ et $x \leq 8$ s'écrit ...
- 2) L'ensemble des réels x tels que $x \geq 3$ ou $x \leq 8$ s'écrit ...
- 3) L'ensemble des réels x tels que $x < 6$ et $x \leq 9$ s'écrit ...
- 4) L'ensemble des réels x tels que $x < 6$ ou $x \leq 9$ s'écrit ...
- 5) L'ensemble des réels x tels que $x > 3$ et $x \leq 0$ s'écrit ...
- 6) L'ensemble des réels x tels que $x > 3$ ou $x \leq 0$ s'écrit ...
- 7) L'ensemble de tous les nombres réels sauf -2 s'écrit ...
- 8) L'ensemble de tous les nombres réels non nuls s'écrit ...

Encadrer et arrondir un réel

Ex 18 : Attention à la calculatrice

1) A l'aide de la calculatrice donner l'arrondi de $\frac{946}{34621}$, à :

l'unité	10^{-1} près	10^{-2} près	10^{-4} près	10^{-5} près	10^{-11} près
...	...	...	...	...	...

2) a) A l'aide de la calculatrice, donner les arrondis à 10^{-10} près de

$\frac{8712870}{48506557}$ et $\frac{505149}{2812281}$

b) Peut-on conclure que ces deux nombres sont égaux ?

3) Peut-on dire que les nombres π et $\frac{1980127}{630294}$ sont égaux ?

Ex 19 : Encadrement décimal

Pour chaque nombre, donner, à l'aide de la calculatrice, un encadrement décimal d'amplitude 10^{-3} , puis donner l'arrondi au millième :

1) $\sqrt{5}$:

2) $-\frac{8}{3}$:

3) π^2 :

Ex 20 : Encadrements décimaux de π

- 1) Vers 250 avant J.-C., Archimède démontre que $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$.
- a) Est-ce un encadrement décimal de π ?

b) Déterminer l'amplitude (arrondi au millième) de cet encadrement.

2) En Inde, vers 380 avant J.-C. , $3 + \frac{177}{1250}$ est utilisé comme valeur approchée de π . Est-ce une bonne valeur approchée de π ? Si, oui à combien près ?

3) En Chine, au 5ème siècle , $\frac{355}{113}$ est utilisé comme valeur approchée de π . Est-ce une bonne valeur approchée de π ? Si, oui à combien près ?

Valeur absolue d'un réel

Ex 21 : QCM – restituer les notions du cours

Parmi les égalités ci-dessous, lesquelles sont vraies ?

a) $|\sqrt{3}-1|=1-\sqrt{3}$

b) $|\pi-3|=\pi-3$

c) $|10^{-5}|=10^5$

d) $|\sqrt{2}-1,5|=1,5-\sqrt{2}$

e) $\left|-\frac{4}{7}\right|=\frac{4}{7}$

f) $\left|\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{3}$

g) $|10^3-10^4|=10^3-10^4$

h) $|10^{-3}-10^{-4}|=10^{-3}-10^{-4}$

Ex 22 :

Compléter les pointillés par $\leq$ ou $\geq$:

a) $|2,7| \dots |3,8|$ b) $|-2,7| \dots |-2,4|$

c) $|- \pi| \dots |3,14|$ d) $|-1,41| \dots |-\sqrt{2}|$

Ex 23 : Inégalité concernant $|x|$

Dans chacun des cas suivants, déterminer une inégalité concernant $|x|$.

a) $x < -7$

b) $x \geq 3$

c) $x \leq -4$

d) $-3 \leq x \leq 8$

e) $-4 < x \leq 4$

f) $-4 < x < 2$

Ex 24 : Simplifications

Soit $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}^-$. Simplifier :

- a) $|ab|$
- b) $|a+3|$
- c) $|4-b|$
- d) $|b-a|$
- e) $\left| \frac{b}{a} \right|$
- f) $|a| \times |b|$

Ex 25 : Valeur absolue d'un produit et d'un quotient

1) Compléter le tableau ci-dessous :

x	3	-2	3	-4	5	-4
y	4	3	-5	-3	-7	0,1
$ x \times y $						
xy						
$ xy $						

- 2) Que peut-on conjecturer concernant la valeur absolue d'un produit de deux réels ?
- 3) Démontrer ce résultat dans les cas ci-dessous :
 - $x \geq 0$ et $y \geq 0$
 - $x \leq 0$ et $y \geq 0$

- $x \geq 0$ et $y \leq 0$
- $x \leq 0$ et $y \leq 0$

Conclure.

4) Quel résultat analogue peut-on imaginer concernant la valeur absolue d'un quotient ? Démontrer-le.

Ex 26 : $|x|$ et $\sqrt{x^2}$

- 1) Calculer $\sqrt{3^2}$ $\sqrt{7^2}$
 $\sqrt{(-11)^2}$ $\sqrt{(-7)^2}$

- 2) Conjecturer une formule permettant de simplifier l'écriture de $\sqrt{x^2}$.
- 3) Simplifier :

$A = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$

$B = \sqrt{(\sqrt{10}-3)^2}$

Ex 27 : Équation de la forme $|x|=k$

1) Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. Quel est l'ensemble des solutions de l'équation $|x|=k$?

2) Résoudre l'équation $|x|=0$.

3) Soit $k \in \mathbb{R}_-^*$.

Déterminer le (ou les) réel(s) positif(s) solution(s) de l'équation $|x|=k$.

Déterminer le (ou les) réel(s) négatif(s) solution(s) de l'équation $|x|=k$.

Conclure.

4) Résoudre par le calcul les équations suivantes :

a) $|x|=3,5$

b) $|x|=-2$

c) $|x|=1-\sqrt{2}$

Ex 28 : Distance entre deux nombres réels

1) Dans chacun des cas, calculer la distance entre les réels :

a) -4 et 8

b) $-3\sqrt{2}$ et $-5\sqrt{2}$

c) π et 3π

2) Dans chacun des cas, donner une interprétation en terme de distance :

a) $\left| \frac{1}{3} - \sqrt{2} \right|$

b) $\left| \sqrt{3} + \frac{1}{7} \right|$

c) $|x+2|$

d) $|\sqrt{3}-x|$

Ex 29 : Représenter un ensemble

1) Sur la droite des réels, représenter :

a) en bleu l'ensemble des réels x , tels que $|x+2|<8$

b) en vert l'ensemble des réels x , tels que $|x-1|<3$

2) Donner tous les entiers appartenant en même temps aux deux ensembles précédents.

Ex 30 : Valeur absolue vers intervalle

Compléter :

1) $|x| \leq 8 \Leftrightarrow x \in [\dots ; \dots]$

2) $|x-7| < 5 \Leftrightarrow \dots$

3) $|x| < \frac{2}{3} \Leftrightarrow \dots$

4) $|x-\sqrt{3}| \leq 5 \Leftrightarrow \dots$

5) $|x+2| < 5 \dots$

6) $|x| \geq 7 \Leftrightarrow \dots$

7) $|x-2| \geq 3 \Leftrightarrow \dots$

Ex 31 : Intervalle vers valeur absolue

Compléter :

1) $x \in [-8; 8] \Leftrightarrow |x| \dots$

2) $x \in [-7; 3] \Leftrightarrow \dots$

3) $x \in]2; 13[\Leftrightarrow \dots$

4) $x \in]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[\Leftrightarrow \dots$

5) $x \in]-\infty; -7[\cup]7; +\infty[\Leftrightarrow \dots$

6) $x \in]-\infty; 3] \cup [7; +\infty[\Leftrightarrow \dots$

Ex 32 : Représenter un ensemble

1) Dans un repère représenter :

a) en vert l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $|x|=3$ b) en rouge l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $|y|=2$ 2) Où sont situés les points tels que $|x|=3$ et $|y|=2$?3) Dans ce même repère, représenter l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $|x| \leq 3$ et $|y| \leq 2$

Ex 33 : Représenter un ensemble

Dans un repère orthonormé, représenter l'ensemble des points $M(x; y)$

$$\text{vérifiant : } \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ y \in \mathbb{N} \\ |x-1| \leq 4 \\ |y+1,5| > 2 \end{cases}$$

1) Expliquer ce que fait l'algorithme ci-dessous écrit en python :

1	def Racine(a,n) :
2	u=1
3	for i in range (1,n+1) :
4	u=(u+a/u)/2
5	return u

2) Exécuter

Racine(5,3)

Racine(5,7)

Racine (5,10)

Que peut-on reprocher à cette fonction Racine ?

3) On souhaite calculer les termes de l'algorithme tant que la distance entre deux termes successifs est supérieure ou égale à un nombre p donné .
Écrire une nouvelle fonction Racine de paramètres a et p qui renvoie la valeur de $\sqrt{a}$ ainsi calculée.

Algorithme**Ex 34 : Algorithme de Héron**

L'algorithme de Héron d'Alexandrie (mathématicien grec du 1^{er} siècle) permet de calculer des valeurs approchées de $\sqrt{a}$ ($a \geq 0$).

L'idée est la suivante :

On considère un rectangle d'aire a et dont les côtés mesurent u et $\frac{a}{u}$ où u est un nombre positif, si possible proche de $\sqrt{a}$.

Pour rendre ce rectangle « un peu plus carré », on construit le rectangle de même aire ayant pour

longueur d'un côté la moyenne des deux mesures du rectangle précédent : $\frac{u + \frac{a}{u}}{2}$

En répétant indéfiniment l'opération, on construit une suite de longueurs de rectangles qui va tendre vers $\sqrt{a}$ c'est à dire vers la longueur du côté du carré d'aire a .

Pour résumer :

- étape 1 : on choisit un nombre u strictement positif..

- étape 2 : on calcule $\frac{u + \frac{a}{u}}{2}$

- étape 3 : on applique à nouveau cette formule en remplaçant u par la valeur trouvée à l'étape précédente.

