

Chapitre 1 - ENSEMBLES DE NOMBRES

1) LES PRINCIPAUX ENSEMBLES DE NOMBRES

A) DÉFINITIONS ET NOTATIONS

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des **nombres entiers naturels**. $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$

L'ensemble des nombres entiers naturels différents de 0 se note $\mathbb{N}^*$.

- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des **nombres entiers relatifs** (ou **nombres entiers**) $\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$

L'ensemble des nombres entiers différents de 0 se note $\mathbb{Z}^*$.

Exemples : ;

- $\mathbb{D}$ est l'ensemble des **nombres décimaux**. (nombres s'écrivant $n \times 10^p$ avec n et p dans $\mathbb{Z}$)

Exemples : ;

- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des **nombres rationnels**. (nombres que l'on peut écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, p étant un nombre entier et q un entier non nul)

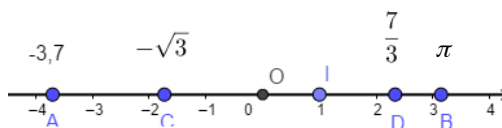
Exemples : ;

- On appelle **nombre irrationnel** tout nombre que l'on ne peut pas écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, p étant un nombre entier et q un entier non nul

Exemples :

- La longueur d'un carré d'aire 2 cm^2 , noté $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. (Démonstration en exercice)
- π est un nombre irrationnel

- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des **nombres réels**, c'est à dire qui sont soit rationnels, soit irrationnels.
 $\mathbb{R}$ est l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée munie d'un repère (O,I).



Exemples :

B) SYMBOLE D'INCLUSION

Définition :

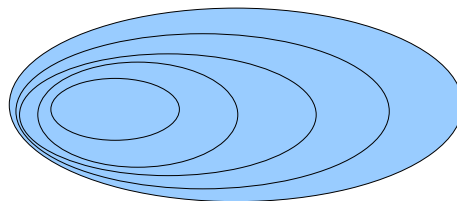
Soit A et B deux ensembles :

$A \subset B$ se lit : " A est **inclus** dans B ", " A est **contenu** dans B " ou " A est **une partie** de B "

$A \subset B$ signifie que tout élément de l'ensemble A appartient à l'ensemble B.

Si A n'est pas inclus dans B on note : $A \not\subset B$

Exemple : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



2) INTERVALLES

A) DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Remarque préliminaire :

On a vu que sur une droite munie d'un repère (O,I), à tout point M de cette droite, on peut associer un réel, appelé abscisse de M dans le repère (O,I). Dans la suite, pour représenter les réels, on se contentera d'utiliser cette droite sans marquer le nom des points.

Cette droite est appelée **droite des réels**.

Définition :

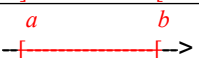
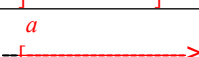
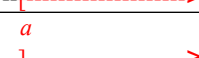
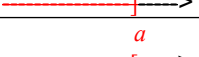
Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

L'ensemble des nombres réels vérifiant la double inégalité $a \leq x \leq b$ est appelé **intervalle fermé** a, b de $\mathbb{R}$ noté $[a; b]$.

Les nombres a et b sont les **bornes** de l'intervalle $[a; b]$.

$b - a$ est l'**amplitude** de l'intervalle $[a; b]$. (c'est à dire sa " largeur ")

Les différents cas sont représentés dans le tableau ci-dessous.

REPRÉSENTATION	INÉGALITÉ	INTERVALLE	
ensemble des réels x vérifiant :			
		$[a; b]$	Intervalle fermé
	$a < x < b$		Intervalle ouvert
		$[a; b[$	Intervalle semi fermé à gauche (ou semi ouvert à droite)
	$a < x \leq b$	$]a; b]$	Intervalle semi fermé à droite (ou semi ouvert à gauche)
	$x \geq a$		Intervalle fermé ($+\infty$, plus l'infini, n'est pas un nombre)
	$x > a$	$]a; +\infty[$	Intervalle ouvert
		$]-\infty; a]$	Intervalle fermé ($-\infty$, moins l'infini, n'est pas un nombre)
	$x < a$	$]-\infty; a[$	Intervalle ouvert

Remarques :

- L'intervalle $]-\infty; +\infty[$ n'est rien d'autre que $\mathbb{R}$
- Notation : $\mathbb{R}^+ =]0; +\infty[$, $\mathbb{R}^- =]-\infty; 0]$, $\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$ et $\mathbb{R}_-^* =]-\infty; 0[$

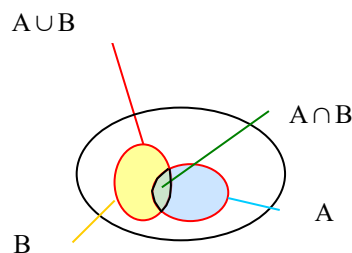
B) INTERSECTION ET RÉUNION

Définition :

Soit A et B deux ensembles.

• **L'intersection** de ces deux ensembles, noté $A \cap B$ (A inter B), est l'ensemble de tous les éléments communs à A et à B .

• **La réunion** de ces deux ensembles, noté $A \cup B$ (A union B), est l'ensemble de tous les éléments appartenant à A **ou** à B .



Remarque :

- Si deux ensembles A et B n'ont pas d'éléments communs, alors on dit que leur intersection est vide. On note : $A \cap B = \emptyset$
- Notation : $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

Exemples :

- $[-5; 3] \cap]1; 5] =]1; 3]$
- $] -3; 2[\cup [1; 3,5] = [1; 2[\cup [3,5]$
- $[-5; 2] \cap [3; 7,5] = \emptyset$

3) ENCADRER ET ARRONDIR UN RÉEL

Définitions :

- Donner un **encadrement** décimal d'un réel x , c'est donner deux nombres décimaux a et b tels que $a \leq x \leq b$.

$b - a$ est appelée **amplitude** de l'encadrement.

On dit qu'un encadrement est à 10^{-n} près (où $n \in \mathbb{N}$) si son amplitude est égale à 10^{-n} .

- **Arrondir** un nombre, c'est lui trouver la valeur la plus proche à une précision donnée.

Exemple :

$3,1 \leq \pi \leq 3,2$ est un encadrement de π d'amplitude 10^{-1}

est une valeur approchée par défaut de π .

est une valeur approchée par excès de π .

est l'arrondi de π à 10^{-1} près. (On regarde le chiffre situé juste après la valeur approchée par défaut : si ce chiffre est 0,1,2,3 ou 4, on choisit comme arrondi, la valeur approchée par défaut, sinon on choisit la valeur approchée par excès)

4) VALEUR ABSOLUE

Définition :

La distance entre deux points de la droite des réels est la différence entre l'abscisse la plus grande et l'abscisse la plus petite.

Exemple :



Définition :

Pour tout nombre réel x , **la valeur absolue** de x (notée $|x|$) est la distance entre x et 0.

On a :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemples :

- $|5| = 5$ car 5 est un nombre positif.
- $|-3| = 3$ car -3 est un nombre négatif.
- Si x est un nombre réel, $|x^2| = x^2$ car $x^2 \geq 0$.

Remarques :

Pour tout réel x , on a :

- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $|x| = |a| \Leftrightarrow x = a \text{ ou } x = -a$
- $|-x| = |x|$
- $\sqrt{x^2} = |x|$

Propriété :

La distance entre deux réels a et b est égale à $|b - a|$

La distance entre a et b est la même que la distance entre b et a . On a donc $|b - a| = |a - b|$

Exemple : La distance entre -4 et -7 est

Propriété :

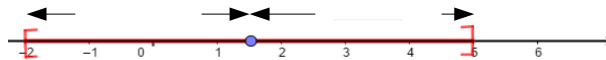
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^+$.

On dit que les intervalles $[a - r; a + r]$ et $]a - r; a + r[$ ont pour **centre** a et pour **rayon** r .

On a :

- $x \in [a - r; a + r] \Leftrightarrow |x - a| \leq r$
- $x \in]a - r; a + r[\Leftrightarrow |x - a| < r$

Exemple :



L'intervalle $[-2; 5]$ a pour amplitude 7 , pour rayon $3,5$ et pour centre $1,5$

On a : $x \in [-2; 5] \Leftrightarrow |x - 1,5| \leq 3,5$