

Chapitre 11 - DROITES ET SYSTÈMES

1) ÉQUATIONS DE DROITES

Dans ce paragraphe, un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan est fixé.

A) VECTEURS DIRECTEURS

Définition :

Soit d une droite du plan.

On appelle **vecteur directeur** de d tout vecteur $\vec{u}$ non nul tel qu'il existe deux points distincts A et B de d tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

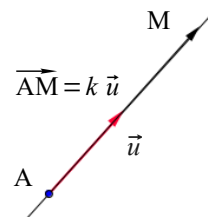
Remarques :

- Un vecteur directeur indique la direction de d . On dit aussi que le vecteur directeur dirige la droite.
- Toute droite admet une infinité de vecteurs directeurs, tous colinéaires entre eux.
- Deux droites du plan de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Propriété :

Soit d une droite, A un point de d et $\vec{u}$ un vecteur directeur de d .

La droite d est l'ensemble des points M du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.



Remarque : Une droite est parfaitement déterminée par la donnée d'un point A et d'un vecteur directeur $\vec{u} \neq \vec{0}$.

B) ÉQUATIONS CARTÉSIENNES D'UNE DROITE

Définition :

Soit d une droite du plan.

On appelle équation de d toute relation vérifiée par les coordonnées $(x; y)$ des points de d .

Exemple :

Soit d la droite d'équation $y = 2x - 1$.

Cela signifie que les coordonnées x et y de n'importe quel point de d vérifient la relation $y = 2x - 1$.

Pour qu'un point appartienne à d , il faut et il suffit que ses coordonnées vérifient l'équation de d .

Par exemple le point A $(2; 3)$ appartient à d car on a bien

En revanche le point B $(1; 4)$ n'appartient à d car

Remarque :

Il n'y a pas unicité de l'équation d'une droite car si $y = 2x - 1$ est une équation de la droite d , $2y = 4x - 2$ en est une autre, ainsi que $2x - y - 1 = 0$

Cas particuliers :

- $x = 4$ est l'équation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées
- $y = 3$ est l'équation d'une droite parallèle à l'axe des abscisses

Quelle est la forme générale des équations de droite ?

Exemple : Déterminer l'équation de la droite d passant par A $(1; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Propriété :

- Toute droite du plan admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ où a , b et c sont trois réels tels que a et b ne sont pas simultanément nuls. (On note $(a; b) \neq (0; 0)$)
Cette équation est appelée **équation cartésienne** de d . Un vecteur directeur de cette droite est alors le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$
- Dans un repère du plan, toute équation de la forme $ax + by + c = 0$ où a , b et c sont trois réels tels que $(a; b) \neq (0; 0)$ est une équation d'une droite de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

Preuve :

- Toute droite d étant définie de manière unique par la donnée d'un point et d'un vecteur directeur non nul, on note :

$A(x_0; y_0)$ un point de d et $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ un de ses vecteurs directeurs (α et β ne sont pas simultanément nuls)

Soit $M(x; y)$ un point du plan.

M appartiendra à d si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ sont colinéaires, c'est à dire :

$$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow (x-x_0)\beta - (y-y_0)\alpha = 0 \Leftrightarrow \beta x - \alpha y + \alpha y_0 - \beta x_0 = 0$$

En posant $a = \beta$, $b = -\alpha$ et $c = \alpha y_0 - \beta x_0$, on constate que l'équation de la droite d est de la forme $ax + by + c = 0$ où a et b ne sont pas simultanément nuls (car α et β ne le sont pas).

$\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est alors un vecteur directeur de d .

- Réciproquement**, si l'équation d'un ensemble de points $M(x; y)$ est de la forme $ax + by + c = 0$, alors soit $A(x_0; y_0)$ un point de cet ensemble, vérifiant $ax_0 + by_0 + c = 0$.

Par soustraction membre à membre des deux égalités, il vient $a(x-x_0) + b(y-y_0) = 0 \Leftrightarrow a(x-x_0) - (-b)(y-y_0) = 0$,
ce qui est la condition de colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

C) ÉQUATION RÉDUITE D'UNE DROITE DU PLAN

Propriété et définition :

- Toute droite d non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $y = mx + p$ où m et p sont deux réels.
Cette équation est appelée **équation réduite** de d .
Un vecteur directeur de cette droite est alors le vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ où m est le **coefficient directeur** de d .
- Toute droite d parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $x = k$ où k est un réel.

Preuve :

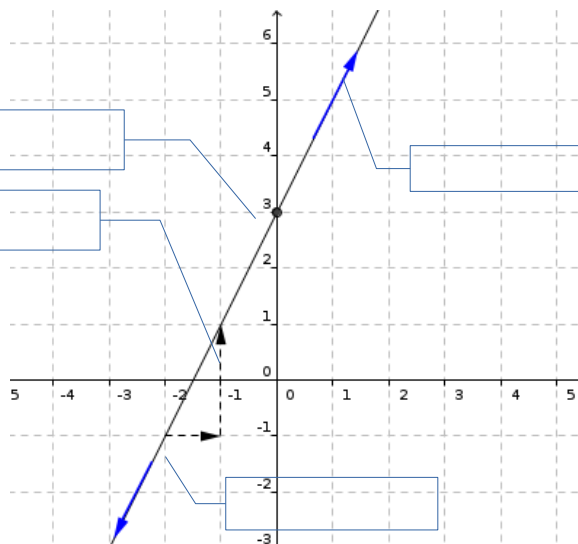
- Soit d une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.
Si d n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, $\vec{u}$ n'est pas colinéaire à $\vec{j}$ et donc $b \neq 0$.
L'équation $ax + by + c = 0$ se réécrit donc sous la forme $y = mx + p$ avec $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$.

Un vecteur directeur de cette droite étant $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, un autre est $\vec{v} = -\frac{1}{b} \vec{u}$ c'est-à-dire $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

- Si d est parallèle à l'axe des ordonnées, alors un de ses vecteurs directeurs est $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$ avec $a \neq 0$.

Puisque $b = 0$ et $a \neq 0$, une équation de d est donc $ax + c = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{c}{a}$ qui est de la forme $x = k$ ($k \in \mathbb{R}$).

Exemple :



- **Le coefficient directeur** est

Il indique l'accroissement de y pour un accroissement de x égal à 1.

- **L'ordonnée à l'origine** est

Elle indique l'ordonnée du point d'intersection de la droite d avec l'axe des ordonnées.

- **Un vecteur directeur** est un vecteur constitué de deux points distincts de la droite. Il indique la direction de la droite.

Remarque :

Le coefficient directeur de la droite d , d'équation $y = mx + p$, indique :

- la direction de d :

- si , d est parallèle à l'axe des abscisses
- si , d « monte » de la gauche vers la droite
- si , d « descend » de la gauche vers la droite

- l'inclinaison de d par rapport à l'axe des abscisses

D) DROITES PARALLÈLES

Propriété :

Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les droites $d : y = mx + p$ et $d' : y = m'x + p'$.

Les droites d et d' sont parallèles si, et seulement si, elles ont le même coefficient directeur.

$$d \parallel d' \Leftrightarrow m = m'$$

Preuve :

2) SYSTÈMES LINÉAIRES

A) ÉQUATION LINÉAIRE A DEUX INCONNUES

Définition :

Toute équation de la forme $ax + by = c$, où a , b et c sont des réels donnés, est une **équation linéaire à deux inconnues** x et y .

Tout couple $(x_0; y_0)$ vérifiant $ax_0 + by_0 = c$ est une **solution** de cette équation.

Résoudre une telle équation, c'est déterminer tous les couples $(x; y)$ solutions.

Interprétation géométrique :

Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, l'ensemble des points $M(x, y)$ dont les coordonnées vérifient la relation $ax + by = c$ où $(a; b) \neq (0; 0)$ est une droite. Les solutions de l'équation sont les couples $(x; y)$ coordonnées des points appartenant à la droite.

B) SYSTÈME LINÉAIRE DE DEUX ÉQUATIONS A DEUX INCONNUES

Définition :

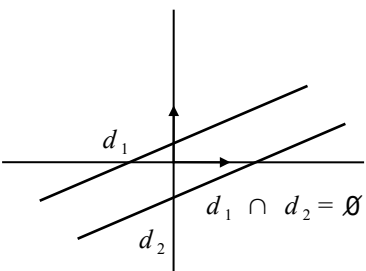
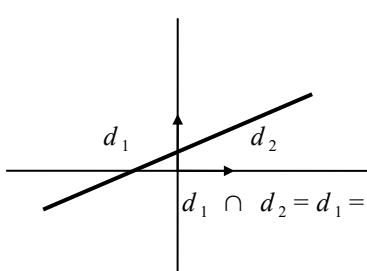
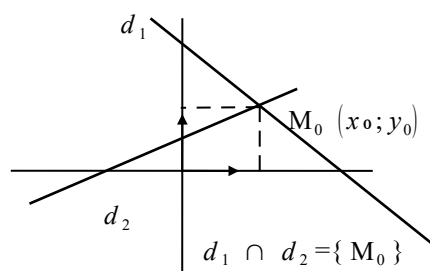
On appelle **système linéaire** de deux équations à deux inconnues, x et y , tout système qui peut se mettre sous la forme :

$$(S) \begin{cases} ax + by = c & (L_1) \\ a'x + b'y = c' & (L_2) \end{cases} \text{ où } a, b, c, a', b' \text{ et } c' \text{ sont des réels donnés.}$$

Résoudre un tel système, c'est rechercher le (ou les) couple(s) $(x; y)$ vérifiant à la fois les deux équations.

C) RÉSOLUTION

Interprétation géométrique : Soit le système (S) dans lequel nous supposons $(a; b) \neq (0; 0)$ et $(a'; b') \neq (0; 0)$. Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les équations (L_1) et (L_2) sont des équations cartésiennes de deux droites d_1 et d_2 . Un couple $(x; y)$ de nombres est solution de (S) si, et seulement si, le point $M(x; y)$ appartient à d_1 et à d_2 . Résoudre (S) revient donc à étudier la position relative des droites d_1 et d_2 .

d_1 et d_2 sont strictement parallèles	d_1 et d_2 sont confondues	d_1 et d_2 sont sécantes
		

- Si d_1 et d_2 ne sont pas parallèles à l'axe des ordonnées, elles ont respectivement pour vecteur directeur $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a}{b} \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a'}{b'} \end{pmatrix}$.

On peut aussi choisir $\vec{v}_1 \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 \begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$. Le résultat est alors immédiat en exprimant $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = ab' - a'b \dots$

- Si d_1 et/ou d_2 est parallèle à l'axe des ordonnées, le résultat est immédiat.

Propriété :

Le système (S) $\begin{cases} ax+by=c \% (L_1) \\ a'x+b'y=c' \% (L_2) \end{cases}$ tel que $ab' - a'b \neq 0$ admet une **unique** solution.

Méthodes numériques de résolution : Résoudre le système (S) : $\begin{cases} 3x-2y=5 (L_1) \\ x+3y=9 (L_2) \end{cases}$

RÉSOLUTION PAR SUBSTITUTION

MÉTHODE	RÉSOLUTION	COMMENTAIRES
- Exprimer x en fonction de y (ou y en fonction de x) à l'aide de la première ou de la deuxième équation - Remplacer ensuite x par cette expression dans la deuxième équation, ce qui permet de trouver y. - Calculer x en utilisant la valeur de y - Vérifier que le couple $(x; y)$ trouvé est bien solution du système - Conclure	(L_2) permet d'écrire : - En remplaçant x par $9-3y$ dans (L_1), on obtient : ←----- - En remplaçant y par 2 dans $x=9-3y$, on obtient : ←----- - On vérifie que le couple $(3; 2)$ est solution du système (S) : ↖-----	Il ne faut pas partir tête baissée ... Il faut essayer de choisir l'expression qui facilite le plus les calculs. On obtient une équation à une inconnue (y ici) On a trouvé y On a trouvé x Attention à l'ordre !

Remarque : une résolution par équivalence présentée comme ci-dessous, permet d'éviter de faire une vérification.

$$\begin{cases} 3x-2y=5 \\ x+3y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=5 \\ x=9-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(9-3y)-2y=5 \\ x=9-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27-9y-2y=5 \\ x=9-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 22=11y \\ x=9-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=3 \end{cases}$$

RÉSOLUTION PAR COMBINAISON (OU ÉLIMINATION)

MÉTHODE	RÉSOLUTION	COMMENTAIRES
Multiplier les deux équations par des nombres bien choisis afin d'obtenir le même coefficient devant x (ou y si c'est plus simple)	On multiplie les deux membres de l'équation (L_2) par 3 . On obtient :	Cette écriture signifie que l'on a multiplié les 2 membres de l'équation (L_2) par 3 et que l'on a remplacé l'équation (L_2) par $(3L_2)$
Soustraire (ou additionner) membre à membre pour éliminer x (ou y)	On soustrait membre à membre (L_2) à (L_1) ; On obtient :	On a trouvé y
Remplacer y par sa valeur dans une des équations.	On remplace y par 2 dans (L_1) . On obtient :	On a trouvé x
- Vérifier que le couple $(x; y)$ trouvé est bien solution du système - Conclure	... déjà vu ! ... ça aussi !	

Remarque : une résolution par équivalence présentée comme ci-dessous, permet d'éviter de faire une vérification.

$$\begin{cases} 3x-2y=5(L_1) \\ x+3y=9(L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=5(L_1) \\ 3(x+3y)=27(L_2 \leftarrow 3L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=5(L_1) \\ 3x+9y=27(L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=5(L_1) \\ -11y=-22(L_2 \leftarrow L_1-L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=2 \times 2 + 5(L_1) \\ y=2(L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$$