Équations du premier degré

Ex 8-1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $11x-(x+1)=x-1$

2) $\frac{2}{7}x=0$

3) $\frac{2x-4}{8}=5$

4) $\frac{2}{5}x-\frac{1}{3}=\frac{7}{10}x+\frac{5}{6}$

5) $\sqrt{2}x-1=\sqrt{8}x+2$

Ex 8-2 : Produit en croix

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ci-dessous (sans oublier les valeurs interdites)

1) $\frac{3x-5}{x^2+3}=0$

2) $\frac{x}{x+2}=\frac{3}{2}$

3) $\frac{3}{x-4}=\frac{5}{2x+2}$

Équations du second degré

Ex 8-3 : Vrai ou faux

1) Un produit A B est nul si et seulement si A est nul et B est nul.

2) L'équation $(x+2)(x+2)=0$ possède deux solutions distinctes.

3) L'équation $(x-6)(x+10)=0$ possède pour solutions -10 et 6.

4) Une équation produit $(ax+b)(cx+d)=0$ (avec a et c deux réels non nuls) admet toujours une ou deux solutions.

Ex 8-4 : Équations produits

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $(5x+1)(x-12)=0$

2) $(2-7x)(11x-2)=0$

3) $(7-6x)(\sqrt{2}x-\sqrt{8})=0$

Pour les équations 4), 5) et 6) commencer par transformer les équations en équations produits.

4) $x(x+6)=3(x+6)$

5) $x^2(1-3x)+4(6x-2)=0$

6) $7-x^2=2x-2\sqrt{7}$

Ex 8-5 : Équations du type $X^2=a$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x^2=20$

2) $x^2=-7$

3) $x^2=0$

4) $t^2=3-\pi$

5) $(x-2)^2=8$

6) $3x^2=7$

Mises en équation

Ex 8-6 : Entiers consécutifs

Trouver trois nombres entiers consécutifs dont la somme est égale à 2019.

Ex 8-7 : Aire d'un carré

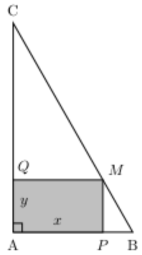
Si on augmente de 2 m la longueur du côté d'un carré, l'aire augmente de 20 m^2 . Quelle est l'aire en m^2 de ce carré ?

Ex 8-8 : Age du père

Un père de 41 ans a trois enfants âgés de 6 ans , 9 ans et 12 ans.
Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il égal à la somme des âges de ses enfants ?

Ex 8-9 : Un rectangle dans un triangle

ABC est un triangle rectangle en A tel que
AB = 4 cm et AC = 7 cm.
M un point variable sur le côté [BC].
P est le point d'intersection de (AB) et de la parallèle à (AC) passant par M , Q est le point d'intersection de (AC) et de la parallèle à (AB) passant par M .
On note x la distance AP et y la distance AQ



1) Quelle est la nature du quadrilatère APMQ ?

2) Dans quel intervalle I varie x ?

3) Démontrer que pour tout x de l'intervalle I on a : $y=7-\frac{7}{4}x$

4) Pour quelle valeur de x APMQ est-il un carré ?

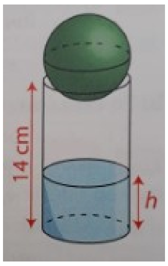
5) a) Exprimer le périmètre de APMQ en fonction de x .

b) Trouver x pour que ce périmètre soit égal à 10 cm .

6) a) Exprimer l'aire du rectangle APMQ en fonction de x

b) Pour quelle valeur de x cette aire est-elle égale à x cm^2 ?

Ex 8-10 : Cylindre et boule



Un cylindre a pour rayon 4 cm et pour hauteur 14 cm.
Une boule a pour rayon 4 cm.
Quelle hauteur d'eau maximum h (en cm), le cylindre doit-il contenir pour que, en plongeant la boule dans ce récipient l'eau ne déborde pas ?

Inégalités

Ex 8-11 : Comparer des nombres.

Soit a et b deux réels tels que $a\leqslant b$. Dans chacun des cas, comparer les nombres :

1) $3a-5$ et $3b-5$

2) $-4a+7$ et $-4b+7$

3) $\frac{-\sqrt{2}a-\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-\sqrt{2}b-\sqrt{3}}{2}$

4) $3a-8$ et $3b-7$

On suppose maintenant : $0 \leqslant a \leqslant b$

5) $5a-6$ et $7b-6$

6) $2a+8$ et $3b+9$

Ex 8-12 : Manipuler les inégalités

1) Si $x \leqslant 1$ et $y \leqslant 2$, que peut-on dire de $3x+4y$?

2) Si $x \leqslant 5$ et $y \geqslant 4$, que peut-on dire de $2x-3y$?

3) Si $x<6$ et $y>-10$, que peut-on dire de $\frac{x}{3}-\frac{y}{5}$?

4) Si $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant y \leqslant 0$, que peut-on dire de $4x+2y$?

5) Si $-2 \leqslant x \leqslant 6$ et $1 \leqslant y \leqslant 4$, que peut-on dire de $3x+4y$?

6) Si $-2 \leqslant x \leqslant 6$ et $1 \leqslant y \leqslant 4$, que peut-on dire de $x-y$?

7) Si $x \geqslant 4$ et $y \geqslant 3$, que peut-on dire de xy ?

8) Si $x \geqslant 4$ et $0<y \leqslant 2$, que peut-on dire de $\frac{x}{y}$?

Ex 8-13 : Contre-exemple

Justifier avec un contre-exemple que les affirmations ci-dessous sont fausses :

1) Si $x \leqslant -3$ et $y \leqslant -4$, alors $xy \leqslant 12$

2) Si $x \geqslant -3$ et $y \geqslant 5$, alors $xy \geqslant -15$

3) Si $100 \leqslant x \leqslant 400$ et $2 \leqslant y \leqslant 4$, alors $50 \leqslant \frac{x}{y} \leqslant 100$

Ex 8-14 : x , x^2 et x^3

1) Soit un réel x , tel que $x\geqslant 1$. Justifier que $x\leqslant x^2\leqslant x^3$

2) Soit un réel x , tel que $0\leqslant x\leqslant 1$. Justifier que $x^3\leqslant x^2\leqslant x$

Ex 8-15 : $\sqrt{a}$ et $\frac{1}{\sqrt{a}}$

Soit a un réel strictement positif.
Comparer $\sqrt{a}$ et $\frac{1}{\sqrt{a}}$ en étudiant leur quotient dans chaque cas :

1) $a\leqslant 1$

2) $a>1$

Ex 8-16 : Quotient $\frac{A}{B}$

Soit n un entier naturel non nul . On pose $A=\frac{0{,}7^n}{n}$ et $B=\frac{0{,}7^{n+1}}{n+1}$.

Comparer A et B en étudiant le quotient $\frac{A}{B}$.

Inéquations du premier degré

Ex 8-17 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $3x+5\geqslant x-3$

2) $-3x<0$

3) $3x-(5x-3)<x$

4) $\frac{2x-4}{7}\geqslant 0$

5) $\frac{7}{15}x+4>\frac{x}{3}-1$

6) $x(x-6)<x(x+5)$

7) $\frac{2x-5}{4}\leqslant\frac{2x-3}{5}$

8) $x(2+2x)\geqslant 2x(x-10)$

Ex 8-18 : Algorithme -Python

Compléter ce programme écrit en Python, afin qu'il affiche l'ensemble des solutions d'une inéquation du type $ax+b>0$ (avec $a\neq 0$)

```
a=float(input("a="))
b=float(input("b="))
c=-b/a
if    ...                        :
      print("Les solutions sont les réels x> ",  ...       ))
else :
      print("Les solutions sont les réels x< ",  ...       ))
```

Inéquations produits

Ex 8-19 : Vrai ou faux

1) Un produit $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ est positif si et seulement si A est positif et B est positif.

2) Le produit $(x-2)(x+6)$ est positif lorsque $x\leqslant -100$.

3) Le produit $(x+3)(x+3)$ est positif quelque soit le réel x .

4) L'inéquation $x^2\leqslant 0$ possède un seul nombre pour solution.

5) L'inéquation $x^2<0$ ne possède aucune solution.

Tous les réels de l'intervalle [0;1] sont solutions de l'inéquation :

6) a) $x^2\geqslant 0$ b) $x^2<1$ c) $x^2\leqslant 4$ d) $x^2>0$

Ex 8-20 : Première ligne du tableau de signes

Parmi les nombres suivants, lesquels interviennent dans la première ligne du tableau de signes du produit $(3x+1)(5x-7)$

$$-3\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ 3\ ;\ -\frac{1}{3}\ ;\ 5\ ;\ 7\ ;\ \frac{5}{7}\ ;\ \frac{7}{5}\ ;\ -\frac{5}{7}\ ;\ -\frac{7}{5}$$

Ex 8-21 : Résolution d'inéquations produits

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $(x-2)(4-x)<0$

2) $\left(\frac{3}{4}-x\right)\left(x-\frac{7}{6}\right)\geqslant 0$

3) $(x+\sqrt{3})(x-3)\geqslant 0$

4) $x^2\leqslant 8$

5) $x^2\leqslant 0$

Pour les inéquations 6), 7) et 8) commencer par transformer les inéquations en inéquations produit

6) $x^2-4+(x+2)(2x+5)<0$

7) $x^2-5<(x+\sqrt{5})(x-2)$

8) $(2x-1)(x+3)\geqslant\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+6)$

<u>Ex 8-22 :</u> Algorithme -Python : balayage

On considère l'équation (E): $8x^3+14x^2-2x-3,5=0$
On cherche a trouver les solutions appartenant à l'intervalle $[-1,5;1,5]$.

1) Compléter le programme ci-dessous écrit en python afin qu'il teste tous les nombres de -1,5 à 1,5 avec un pas de p.

```
p=float(input("p="))
x=-1.5
while    ...                    :
      if  (8*x**3+14*x**2-2*x-3.5==0) :
            print(x)
      x=   ...
```

2) Tester ce programme avec p=0,25, p=0,1 et p=0,01

3) A-t-on résolu l'équation (E) avec ce programme ?

4) Déterminer le réel c tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$8(x^2-0,25)(x+c)=8x^3+14x^2-2x-3,5$$

5) En déduire les solutions de l'équation (E).

Inéquations quotients

Ex 8-23 : Résolution d'inéquations quotients

Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\frac{2x-5}{x-6} \geqslant 0$

b) $\frac{5x-2}{-3x+1} < 0$

c) $\frac{3x}{4x+9} \geqslant 0$

d) $\frac{2x-10}{11x+2} > 0$