ÉQUATIONS, INÉGALITÉS ET INÉQUATIONS

1) ÉQUATIONS

Définition :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation à une inconnue consiste à trouver, si elles existent, toutes les valeurs réelles de l'inconnue vérifiant l'égalité proposée . Ces nombres constituent **l'ensemble des solutions** de l'équation.

Deux équations **équivalentes** sont deux équations, ayant le même ensemble de solutions . On utilise le signe $\Leftrightarrow$

Propriété :

Soit a , b , et c trois réels.

- Si on **ajoute** (ou on **retranche**) un même nombre aux deux membres d'une égalité (et donc d'une équation) , on obtient une égalité (équation) équivalente.

$$a=b \quad \Leftrightarrow \quad a-c=b-c \quad \Leftrightarrow \quad a+c=b+c$$

- Si on **multiplie** (ou on **divise**) les deux membres d'une égalité (équation) par un même nombre, on obtient une égalité (équation) équivalente.

$$a=b \quad \Leftrightarrow \quad ac=bc \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{c}=\frac{b}{c} \quad (\ c\neq 0 \ )$$

Exemple :

On retranche $2x$ à chaque membre

On ajoute 5 à chaque membre

On divise chaque membre par 2

$$4x-5=2x+10 \quad \Leftrightarrow \quad 4x-2x-5=10 \quad \Leftrightarrow \quad 2x-5=10 \quad \Leftrightarrow \quad 2x=10+5 \quad \Leftrightarrow \quad 2x=15 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{15}{2}$$

L'ensemble des solutions est donc : $S=\left\{\frac{15}{2}\right\}$

Propriété : Équation produit

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul :

$$A(x)\times B(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad A(x)=0 \text{ ou } B(x)=0$$

Cette méthode permet de résoudre certaines équations qui ne sont pas du premier degré

Exemple :

$$2x^2=5x \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2-5x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x(2x-5)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \text{ ou } 2x-5=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \text{ ou } x=\frac{5}{2}$$

L'ensemble des solutions est donc : $S=\left\{0;\frac{5}{2}\right\}$

Propriété : Équation $x^2=a$

Soit a un réel , l'équation $x^2=a$

- n'admet pas de solution si $a<0$
- admet une unique solution 0 si $a=0$
- admet deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ si $a>0$

Exemples :

- $x^2=5 \quad \Leftrightarrow \quad x=-\sqrt{5}$ ou $x=\sqrt{5}$
- $t^2=3-\pi \quad 3-\pi<0$, donc il n'y a pas de solution.

2) INÉGALITÉS

Propriété : Addition et inégalités

Soit a , b , et c trois réels . Les propriétés ci-dessous présentées avec $\leqslant$ sont aussi vraies pour <, $\geqslant$ et >.

Si on **ajoute** (ou on **retranche**) un même nombre aux deux membres d'une inégalité (et donc d'une inéquation) , on obtient une inégalité (inéquation) de **même sens**.

$$a\leqslant b \quad \Leftrightarrow \quad a+c\leqslant b+c \quad \Leftrightarrow \quad a-c\leqslant b-c$$

Preuve :

Rappel : « Pour comparer deux nombres, on peut comparer leur différence par rapport à zéro »

On a : $(a+c)-(b+c)=a+c-b-c=a-b$

Or $a\leqslant b$, donc :

$$a-b\leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad (a+c)-(b+c)\leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad a+c\leqslant b+c$$

Propriété : Multiplication et inégalités

Soit a , b , et c trois réels . Les propriétés ci-dessous présentées avec $\leqslant$ sont aussi vraies pour <, $\geqslant$ et >.

- Si on **multiplie** (ou on **divise**) les deux membres d'une inégalité (inéquation) par un même nombre strictement **positif**, on obtient une inégalité (inéquation) de **même sens**.

$$a\leqslant b \quad \Leftrightarrow \quad ac\leqslant bc \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{c}\leqslant\frac{b}{c} \quad (\ c\neq 0 \ )$$

- Si on **multiplie** (ou on **divise**) les deux membres d'une inégalité par un même nombre strictement **négatif**, on obtient une inégalité de **sens contraire**.

$$a\leqslant b \quad \Leftrightarrow \quad ac\geq bc \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{c}\geqslant\frac{b}{c} \quad (\ c\neq 0 \ )$$

Idée de preuve :

Soit f et g les fonctions linéaires définie par $f(x)=cx$ et $g(x)=\frac{1}{c}x$.

Si $c>0$, f et g sont croissantes et si $c<0$, f et g sont décroissantes.

En appliquant les fonctions f et g à l'inégalité $a\leqslant b$, on en déduit les résultats.

Par exemple, si $c<0$:

$$a\leqslant b \quad \Rightarrow \quad g(a)\geqslant g(b) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c}\times a\geqslant\frac{1}{c}\times b \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{c}\geqslant\frac{b}{c}$$

Propriété : comparaison à l'aide d'un quotient

Soit a et b deux réels strictement positifs.

- Pour comparer deux réels strictement positifs, on peut comparer leur quotient à 1.
- Si $\frac{a}{b} \leqslant 1$, alors $a \leqslant b$
- Si $\frac{a}{b} \geqslant 1$, alors $a \geqslant b$

Propriété : Ajouter des inégalités de même signe

Soit a , b , c et d quatre réels . La propriété ci-dessous présentée avec $\leqslant$ est aussi vraie pour <, $\geqslant$ et >.

Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $a+c \leqslant b+d$

Exemple :

$\pi < 3,2$ et $\sqrt{2} < 1,5$, donc $\pi + \sqrt{2} < 3,2 + 1,5$ et donc $\pi + \sqrt{2} < 4,7$

Remarques :

- On peut aussi multiplier membre à membre des inégalités **si elles sont positives**.
- On ne peut pas diviser ou soustraire membre à membre des inégalités.

3) INÉQUATIONS

Définition :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ une inéquation à une inconnue consiste à trouver, si elles existent, toutes les valeurs réelles de l'inconnue vérifiant l'inégalité proposée . Ces nombres constituent **l'ensemble des solutions** de l'inéquation.

Deux inéquations **équivalentes** sont deux inéquations, ayant le même ensemble de solutions . On utilise le signe $\Leftrightarrow$

Exemple :

On retranche 2*x* à chaque membre

On ajoute 7 à chaque membre

On divise chaque membre par 3

$5x - 7 \leqslant 2x + 8 \Leftrightarrow 5x - 2x - 7 \leqslant 8 \Leftrightarrow 3x - 7 \leqslant 8 \Leftrightarrow 3x \leqslant 8 + 7 \Leftrightarrow 3x \leqslant 15 \Leftrightarrow x \leqslant 5$

L'ensemble des solutions est donc : $S =]-\infty ; 5]$

Méthode : Inéquation produit

Soit a , b , c et d quatre nombres réels avec a et b non nuls.
Pour résoudre l'inéquation $(ax+b)(cx+d) < 0$, on étudie séparément les signes de $ax+b$ et de $cx+d$, puis à l'aide d'un tableau de signes on détermine le signe du produit $(ax+b)(cx+d)$.

La méthode est identique pour $(ax+b)(cx+d) \leqslant 0$, $(ax+b)(cx+d) \geqslant 0$ et $(ax+b)(cx+d) > 0$

Exemple :

Résolution de $(-3x+1)(2x-5) > 0$

A l'aide d'un tableau de signes, on étudie successivement les signes de $-3x+1$ et $2x-5$.

Plusieurs méthodes pour étudier le signe de $2x-5$:

- On peut résoudre : $2x-5>0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x>5 \quad \Leftrightarrow \quad x>\frac{5}{2}$

On en déduit immédiatement les solutions de l'inéquations $2x-5<0$ et les solutions de l'équation $2x-5=0$ et donc la valeur charnière $\frac{5}{2}$.

- On peut aussi utiliser les propriétés sur la croissance de la fonction affine f définie par $f(x)=2x-5$

On procède de la même façon pour $-3x+1$: $-3x+1>0 \quad \Leftrightarrow \quad -3x>-1 \quad \Leftrightarrow \quad x<\frac{1}{3}$

On en déduit le signe de $(-3x+1)(2x-5)$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$-3x+1$		$+$	0	$-$		$-$	
$2x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$(-3x+1)(2x-5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc : $S = \left]\frac{1}{3} ; \frac{5}{2}\right[$

<u>Méthode : Inéquation quotient</u>

Soit a, b, c et d quatre nombres réels avec c et $ad-bc$ non nuls.
Pour résoudre l'inéquation $\frac{ax+b}{cx+d}<0$, on étudie séparément les signes de $ax+b$ et de $cx+d$, puis à l'aide d'un tableau de signes on détermine le signe du quotient $\frac{ax+b}{cx+d}$.
La méthode est identique pour $\frac{ax+b}{cx+d}\leq 0$, $\frac{ax+b}{cx+d}>0$ et $\frac{ax+b}{cx+d}\geq 0$

<u>Exemple :</u>

Résolution de $\frac{-3x+1}{2x-5}<0$

A l'aide d'un tableau de signes, on étudie successivement les signes de $-3x+1$ et $2x-5$.

On en déduit le signe de $\frac{-3x+1}{2x-5}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$-3x+1$		$+$	0	$-$		$-$	
$2x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{-3x+1}{2x-5}$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc : $S = \left]-\infty ; \frac{1}{3}\right[\cup \left]\frac{5}{2} ;+\infty\right[$.