CONFIGURATIONS PLANES

1) REPÈRE DU PLAN

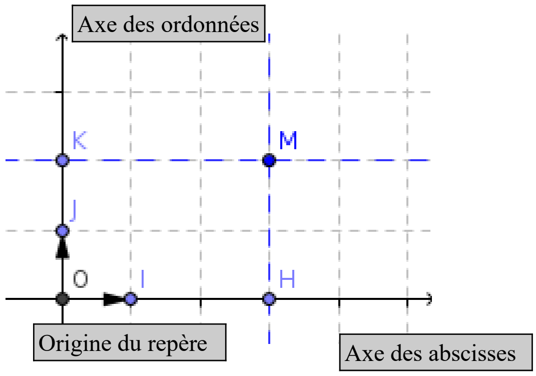
A) COORDONNÉES D'UN POINT DANS UN REPÈRE

Définition :

Un **repère du plan** est défini par trois points non alignés O, I et J et est noté (O, I, J).

(OI) et (OJ), sécantes en O, sont **les axes du repère**.

O est appelé **l'origine du repère**. (OI) est l'axe des **abscisses** et (OJ) celui des **ordonnées**.



On parle souvent de repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, plutôt que de repère (O, I, J)

Cas particuliers :

- Si (OI) et (OJ) sont perpendiculaires, alors le repère (O, I, J) est dit **orthogonal**.
- Si, de plus, $OI = OJ = 1$, alors le repère (O, I, J) est dit **orthonormal**.

Définition :

Soit M un point du plan muni du repère (O, I, J).
En traçant la parallèle à chaque axe passant par M, on obtient deux points H et K.

L'abscisse de M dans (O, I, J), noté x_M, est l'abscisse de H sur (OI).

L'ordonnée de M dans (O, I, J), noté y_M, est l'abscisse de K sur (OJ).

$(x_M ; y_M)$ est **le couple des coordonnées** du point M dans le repère (O, I, J).

Éthymologie :

- "Orthogonal" vient du grec *orthos* droit et gonos *angle*

- "Orthonornal" vient du grec orthos *droit* et du latin norma *équerre*

- "Abscisse" vient du latin *abscissa*, coupée.

- "Ordonnée" vient du latin du latin *ordinare*, mettre en ordre.

Exemples : O a pour coordonnées $(0 ; 0)$; I pour coordonnées $(1 ; 0)$; J a pour coordonnées $(0 ; 1)$; M a pour coordonnées $(3 ; 2)$

B) COORDONNÉES DU MILIEU D'UN SEGMENT

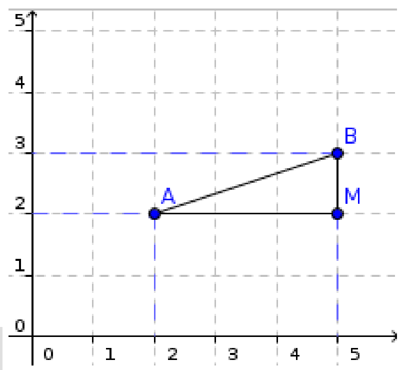
Propriété :

Soit $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points du plan muni d'un repère (O, I, J).

Le milieu M du segment $[AB]$ a alors pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

Exemple : Si $A(2 ; 1)$ et $B(5 ; -1)$, alors $M\left(\frac{2+5}{2} ; \frac{1+(-1)}{2}\right)$, donc $M\left(\frac{7}{2} ; 0\right)$.

C) DISTANCE ENTRE DEUX POINTS



Propriété :

Soit $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points du plan muni d'un repère **orthonormal** (O, I, J).
La distance de A à B est donnée par :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Preuve :

Le triangle ABM est rectangle en M, donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$AB^2 = AM^2 + MB^2 = (x_M - x_A)^2 + (y_B - y_M)^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$ et donc $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Exemple :

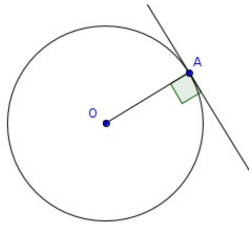
Dans la figure ci-dessus, $A(2 ; 2)$ et $B(5 ; 3)$, alors : $AB = \sqrt{(5-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

2) DISTANCE ET ENSEMBLE DE POINTS

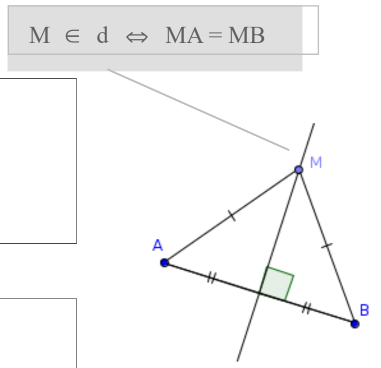
A) CERCLE ET DISQUE

<u>Définition :</u> Cercles et disques

- **<u>Le cercle</u>** de centre O et de rayon r est **<u>l'ensemble</u>** des points M du plan tels que $OM = r$.
- **<u>Le disque</u>** de centre O et de rayon r est **<u>l'ensemble</u>** des points M du plan tels que $OM \leqslant r$.
- **<u>La tangente</u>** à un cercle de centre O en un point A est la droite passant par A et perpendiculaire au rayon $[OA]$.
  Un cercle et la tangente en l'un de ses points ont un unique point commun.



B) MÉDIATRICES ET TRIANGLE



<u>Définition :</u>

<u>La médiatrice</u> d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.

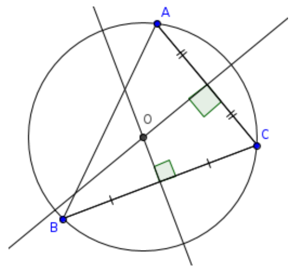
<u>Les médiatrices d'un triangle</u> sont les médiatrices des côtés du triangle.

<u>Propriété :</u>

La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment.

<u>Point de concours :</u>

Dans un triangle, les trois médiatrices sont concourantes en un point O qui est **<u>le centre du cercle circonscrit</u>** à ce triangle.

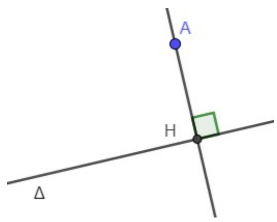


3) DISTANCE D'UN POINT À UNE DROITE

<u>Définition :</u>

Soit A un point du plan et Δ une droite du plan.

<u>Le projeté orthogonal</u> de A sur Δ est le point d'intersection de Δ et de la perpendiculaire à Δ passant par A.



<u>Remarque :</u>

Si $A \in \Delta$, alors le projeté orthogonal du point A sur Δ est lui-même.

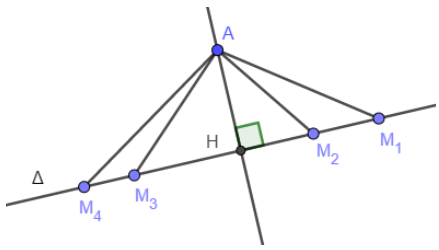
<u>Définition :</u>

On appelle **<u>distance d'un point à une droite</u>**, la plus petite distance entre ce point et un point de la droite.

<u>Propriété :</u>

Soit A un point du plan, Δ une droite du plan et H le projeté orthogonal de A sur Δ .

La distance du point A à la droite Δ est la distance AH.



Preuve : Disjonction de cas

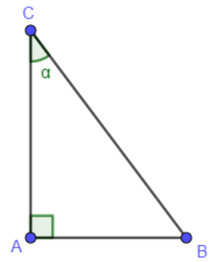
Cas 1 : $A \in \Delta$,

A et son projeté orthogonal H sont confondus et la distance de A à Δ est égale à 0 et donc à la distance AH.

Cas 2 : $A \notin \Delta$

Soit M un point de Δ distinct de H.
AMH est rectangle en H . L'hypoténuse étant le plus long côté d'un triangle rectangle, on a forcément AM>AH.

4) QUELQUES PROPRIÉTÉS DU TRIANGLE RECTANGLE



Propriété :

Dans un triangle rectangle, on note α la mesure en degré de l'un des deux angles aigus. On a :

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$$

Remarque :

On écrit $\cos^2\alpha$ pour simplifier l'écriture à la place de $(\cos(\alpha))^2$, mais il faut bien comprendre que ce n'est pas cos qui est au carré !

Preuve :

Dans la figure ci-dessus , on a $\cos(\alpha)=\frac{AC}{BC}$ et $\sin(\alpha)=\frac{AB}{BC}$.

Ainsi $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=\left(\frac{AC}{BC}\right)^2+\left(\frac{AB}{BC}\right)^2=\frac{AC^2+AB^2}{BC^2}$

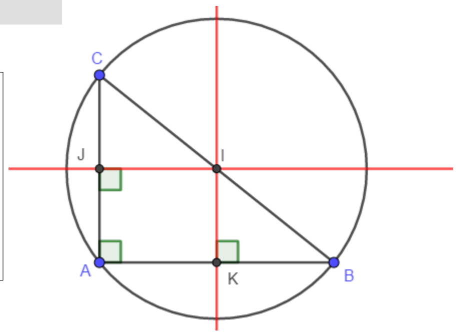
Or le triangle ABC est rectangle en A . D'après le théorème de Pythagore, on a donc : $AC^2+AB^2=BC^2$

On obtient donc : $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=\frac{BC^2}{BC^2}=1$

Propriété :

Dans un triangle rectangle, les médiatrices des deux côtés adjacents à l'angle droit se coupent au milieu de l'hypoténuse.

Le cercle circonscrit d'un triangle rectangle est donc le cercle de centre le milieu de l'hypoténuse et de rayon la moitié de la longueur de l'hypoténuse.



Propriété :

Si un triangle est inscrit dans un cercle et que l'un de ses côtés est un diamètre de ce cercle, alors ce triangle est rectangle.