ARITHMÉTIQUE

1) LES ENTIERS NATURELS ET LES ENTIERS

Définitions :

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des **nombres entiers naturels** . $\mathbb{N}=\{0;1;2;3;...\}$
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des **nombres entiers** **(ou nombres entiers relatifs)** $\mathbb{Z}=\{...;-3;-2;-1;0;1;2;3;...\}$

Remarque : La somme, la différence et le produit de deux entiers sont des entiers.

Pour la division dans $\mathbb{Z}$, on utilise la division euclidienne (avec reste).

Définition : division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Soit deux entiers a et b (avec $b\neq 0$).
On peut écrire a de façon unique sous la forme :
$a=b\times q+r$ (où $q\in\mathbb{Z}$ et $r\in\mathbb{N}$, tel que $0\leqslant r<|b|$)

q est appelé **quotient** .

r est appelé **reste** .

Exemples :

- $29=7\times 3+8$ n'est pas la division euclidienne de 29 par 3 car $8\geqslant 3$
- La division euclidienne de 29 par 3 est : $29=9\times 3+2$

9 est le quotient et 2 est le reste (on a bien 2<3)

2) MULTIPLES ET DIVISEURS

Définitions :

Soit deux entiers n et p .
Si le reste de la divison euclidienne de n par p est égal à 0, on dit que :

- p est un **diviseur** de n ou que n est **divisible** par p .
- n est un **multiple** de p .

Il existe un entier q tel que $n=p\times q$

Exemple : $45=9\times 5$. Donc 9 est un diviseur de 45 et 45 est un multiple de 9.

Remarques :

- Tout nombre entier est un multiple de 1 et de lui-même (par exemple : 3 = 1 × 3 ou 5 = 5 × 1).

- L'entier 0 est un multiple de tout nombre entier n, car $0 = 0 \times n$.

- 0 n'admet qu'un seul multiple : 0

- Tout nombre entier n non nul admet une infinité de multiples: 0, n , $2n$, $3n$ … (c'est à dire les entiers $k\times n$, où $k\in\mathbb{Z}$)

Propriété :

Soit a , n et m trois entiers, tels que n et m sont des multiples de a .

La somme $n+m$, la différence $m-n$ et le produit $n\times m$ sont aussi des multiples de a .

Preuve (pour la somme) :

n et m sont des multiples de a . Il existe donc deux entiers k et k' tels que $n=k\times a$ et $m=k'\times a$
On a alors :
$n+m=k\times a+k'\times a=(k+k')a=K\times a$ où $K=k+k'$.
Or $K\in\mathbb{Z}$ (car la somme de deux entiers est un entier)
On en déduit que $n+m$ est un multiple de a .

Exemple :

324 et 111 sont des multiples de 3 .
324+111, 324-111 et 324 × 111 sont donc aussi des multiples de 3.

3) NOMBRES PAIRS ET NOMBRES IMPAIRS

Propriété et définition :

Soit un entier n .

- Si n est divisible par 2 (c'est à dire un multiple de 2), on dit que n est **pair**.

Il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $n=2k$

- Si n n'est pas pair, il est **impair**.

Il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $n=2k+1$

Critère de parité :

Un nombre est pair si et seulement si son chiffre des unités est pair.

Propriété :

- La somme de deux nombres pairs est un nombre pair.
- La somme de deux nombres impairs est un nombre pair.
- La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair.

Preuve (pour la somme de deux nombres impairs) :

Soit n et n' deux nombres impairs.
Il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$, tels que $n=2k+1$ et $n'=2k'+1$.
On a alors :

$$n+n'=2k+1+2k'+1=2k+2k'+2=2(k+k'+1)=2\mathrm{K} \quad \text{où} \quad \mathrm{K}=k+k'+1$$

Comme $\mathrm{K} \in \mathbb{Z}$, $n+n'$ est un nombre pair.

Propriété :

Soit un entier n .
- Si n est pair, alors n^2 est pair.
- Si n est impair alors n^2 est impair.

Preuve :

Si n est pair, il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $n=2k$.
On a alors :

$$n^2=(2k)^2=2k\times 2k=2\times(2k^2)=2\mathrm{K} \quad \text{où} \quad \mathrm{K}=2k^2$$

Comme $\mathrm{K} \in \mathbb{Z}$, n^2 est pair.

Si n est impair, il existe $k \in \mathbb{Z}$, tel que $n=2k+1$.
On a alors :

$$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1=2\mathrm{K}+1 \quad \text{où} \quad \mathrm{K}=2k^2+2k$$

Comme $\mathrm{K} \in \mathbb{Z}$, n^2 est impair.

Exemples :

- 24 est pair donc 24^2 =576 est pair .
- 781^8 est un nombre impair.

En effet, 781 est impair, donc 781² est impair, donc $(781^2)^2$ est impair et enfin $(((781^2))^2)^2=781^8$ est impair.

Remarque :

Les réciproques sont aussi vraies :
- si n^2 est pair, alors n est pair.
- si n^2 est impair, alors n est impair.

4) NOMBRES PREMIERS

Définition :

Un entier naturel est **premier** s'il n'admet que deux diviseurs positifs : 1 et lui même.

Un nombre qui n'est pas premier est **composé**.

Remarques :

- 1 n'est pas un nombre premier.
- 0 n'est pas un nombre premier car il est divisible par tout entier non nul.

Exemple :

- 2,3,5,7,11,13,17 sont des nombres premiers.
- 45 n'est pas un nombre premier car $45=9\times 5$.

Propriété : (admise)

Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 se décompose en produit de facteurs premiers et cette décomposition est unique.

Exemple :

450	2
225	3
75	3
25	5
5	5
1	

On obtient :

$450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$

17787	3
5929	7
847	7
121	11
11	11
1	

On obtient :

$17787 = 3 \times 7^2 \times 11^2$

On cherche les diviseurs premiers dans l'ordre croissant.

5) FRACTIONS IRRÉDUCTIBLES

Définition :

On dit qu'une fraction est **irréductible** lorsque son numérateur et son dénominateur n'ont pas de diviseur commun autre que 1.

Exemple : En utilisant la décomposition en produit de facteurs premiers.

$$\frac{450}{17787} = \frac{2\times3^2\times5^2}{3\times7^2\times11^2} = \frac{2\times3\times5^2}{7^2\times11^2} = \frac{150}{5929}$$