FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

1) VOCABULAIRE DES FONCTIONS

Définition :

Soit D_f un ensemble de nombre.
On appelle **fonction** f sur l'ensemble D_f le procédé mathématique qui permet d'associer à tout nombre x de D_f un réel unique noté $f(x)$.
On note $f : x \longmapsto f(x)$ (lire : « fonction f qui à tout x associe le nombre $f(x)$ »)

Vocabulaire :
- $f(x)$ est l'**image** de x **(lire : " f de x ").**
- x est un **antécédent** de $f(x)$
- D_f est l'**ensemble de définition** (ou domaine de définition) de f .

Remarques :
- x ne représente pas un réel donné, mais n'importe le quel des éléments de l'intervalle D_f . On dit que x est une variable.
(On peut aussi utiliser les lettres u , t , etc)
- On a appelé la fonction f , mais rien ne nous oblige à l'appeler ainsi . (On utilise souvent les lettres g , h , etc ou f_1 , f_2 ...)

Exemple : Sur l'intervalle [-2 ; 2], on considère la fonction $f : x \longmapsto 3x-1$

On a $f(-2)=3\times(-2)-1=-7$
On en déduit que l'image de -2 par la fonction f est -7 et que -2 est un antécédent de -7 par la fonction f

Remarques :
- Si un nombre n'a pas d'image, c'est qu'il n'appartient pas à l'ensemble de définition de la fonction.
- Dans la pratique, les fonctions sont souvent données sans que soit précisé l'ensemble de définition.
- Dans ce cas, il ne faut pas oublier de chercher D_f en se rappelant qu'il s'agit de tous les réels x tels que $f(x)$ soit "calculable".

2) FONCTIONS AFFINES

Définition :

On appelle **fonction affine** toute fonction de la forme $f : x \longmapsto ax+b$ où a et b sont des réels fixés.

Exemple : La fonction f définie sur ℝ par $f : x \longmapsto 5x-2$ est une fonction affine.

Cas particuliers :

- Si $b=0$, on dit que la fonction est **linéaire.**
- Si $a=0$, la fonction est du type $f : x \longmapsto b$ où b est un réel fixé, elle est donc **constante**.

Propriété :

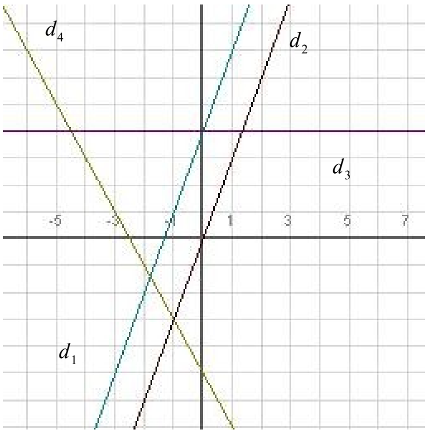
La représentation graphique d'une fonction affine est **une droite**.

Réciproquement, toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine.

Une droite parallèle à l'axe des ordonnées ne peut représenter une fonction puisque cela signifierait qu'il existe un antécédent qui a une infinité d'images.

Cas particuliers :

- Si $b=0$, la représentation graphique de f est une droite passant par l'origine O du repère.
- Si $a=0$, la représentation graphique de f est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

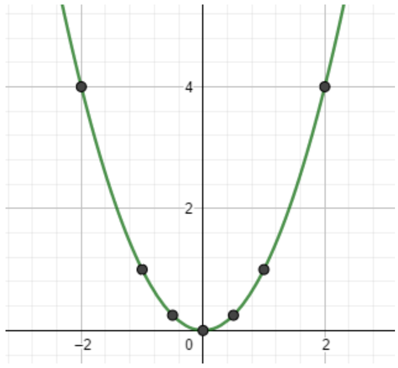


Exemples :
- La fonction $x \longmapsto 3x+4$ est représentée par la droite d_1
- La fonction $x \longmapsto 3x$ est représentée par la droite d_2
- La fonction $x \longmapsto -2x-5$ est représentée par la droite d_4
- La fonction $x \longmapsto 4$ est représentée par la droite d_3

3) LA FONCTION CARRÉ

Définition :

La fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout nombre réel x associe son carré x^2, est appelée **fonction carré.**



Pour tracer la courbe représentative d'une fonction de référence, on établit un tableau de valeurs, puis on place les points correspondant s dans un repère orthogonal (orthonormé de préférence)

x	-4	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3	4
$f(x)=x^2$	16	9	4	1	0,25	0	0,25	1	4	9	16

Définition :

Dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative de la fonction carrée est appelée **parabole** d'équation $y=x^2$.

Le point $O(0\ ;0)$ est appelé **sommet de la parabole**.

Propriété :

Dans un repère orthogonal, la parabole représentant la fonction carrée est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Preuve :

Pour tout réel x , $(-x)^2=x^2$, donc les points $M(x;x^2)$ et $M'(-x;(-x)^2)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Remarque :
Pour tout réel x , $x^2\geqslant 0$. La parabole est donc située au-dessus de l'axe des abscisses.

4) LA FONCTION INVERSE

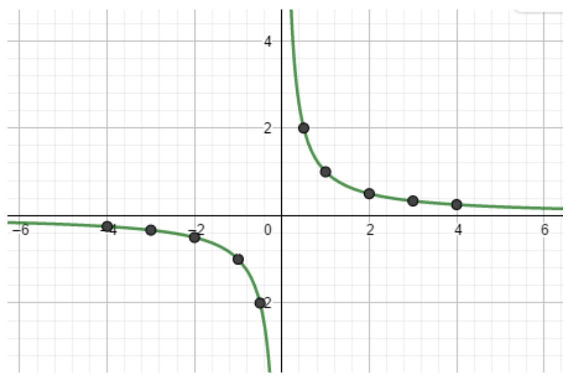
Définition :

La fonction définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ qui à tout nombre réel x non nul associe son inverse $\frac{1}{x}$, est appelée **fonction inverse**.

x	-4	-3	-2	-1	-0,5	-0,25	0,25	0,5	1	2	3	4
$f(x)=\frac{1}{x}$	-0,25	$-\frac{1}{3}$	-0,5	-1	-2	-4	4	2	1	0,5	$\frac{1}{3}$	0,25

Définition :

Dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative de la fonction inverse est appelée **hyperbole** d'équation $y=\frac{1}{x}$.



Propriété :

Dans un repère orthogonal, l'hyperbole représentant la fonction inverse est symétrique par rapport à l'origine $O(0;0)$ du repère.

Preuve :

Pour tout réel x , $\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}$, donc les points $M\left(x;\frac{1}{x}\right)$ et $M'\left(-x;\frac{1}{-x}\right)$ sont symétriques par rapport à O.

Remarques :

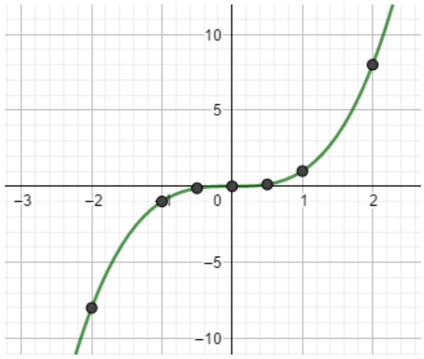
- La fonction inverse n'est pas définie en 0 . Ce qui explique que l'hyperbole est composée de deux branches distinctes.
- Les nombres x et $\frac{1}{x}$ sont de même signe . Ce qui explique que l'hyperbole est située au-dessous de l'axe des abscisses sur $]-\infty;0[$ et au-dessus sur $]0;+\infty[$

5) LA FONCTION CUBE

Définition :

La fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout nombre réel x associe son cube x^3 , est appelée **fonction cube.**

x	-4	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3	4
$f(x)=x^3$	-64	-27	-8	-1	-0,125	0	0,125	1	8	27	64



Propriété :

Dans un repère orthogonal, la courbe représentant la fonction cube est symétrique par rapport à l'origine $\mathrm{O}(0;0)$ du repère.

Preuve :

Pour tout réel x , $(-x)^3=-x^3$, donc les points $\mathrm{M}(x;x^3)$ et $\mathrm{M}'(-x;(-x)^3)$ sont symétriques par rapport à O.

Remarque : Les nombres x et x^3 sont de même signe . Ce qui explique que la courbe représentant la fonction cube au-dessous de l'axe des abscisses sur $]-\infty;0[$ et au-dessus sur $]0;+\infty[$

6) LA FONCTION RACINE CARRÉE

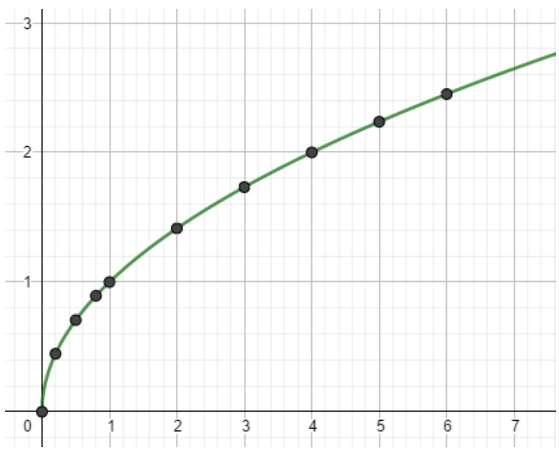
Définition :

La fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $x \longmapsto \sqrt{x}$, est appelée **fonction racine carrée.**

x	0	0,2	0,5	0,8	1	2	3	4	5	6
$f(x)=\sqrt{x}$ (à 10^{-2} près)	0	0,45	0,71	0,89	1	1,41	1,73	2	2,24	2,45

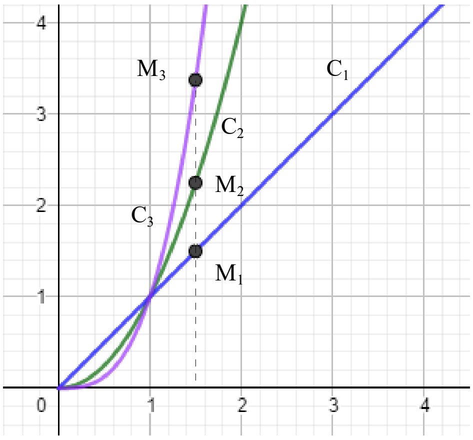
Remarque : Pour tout réel $x \geqslant 0$, $\sqrt{x} \geqslant 0$.

Ce qui explique que la courbe représentant la fonction racine carrée est dans la partie du repère où abscisses et ordonnées sont positives.



7) POSITIONS RELATIVES

On note respectivement C_1 , C_2 et C_3 les courbes représentatives des fonctions $f_1 : x \longmapsto x$, $f_2 : x \longmapsto x^2$ et $f_3 : x \longmapsto x^3$.



Les points de cordonnées (0;0) et (1;1) sont communs aux trois courbes

Propriété :

- Pour tout $x \in [0;1]$, on a $x \geqslant x^2 \geqslant x^3$.
Conséquence graphique sur [0;1] : C_1 est au-dessus de C_2 qui est elle-même au-dessus de C_3

- Pour tout $x \geqslant 1$, on a $x \leqslant x^2 \leqslant x^3$
Conséquence graphique sur [1;+ ∞ [: C_3 est au-dessus de C_2 qui est elle-même au-dessus de C_1

Preuve :

Soit un réel $x \geqslant 0$.
On considère les points $M_1(x;x)$, $M_2(x;x^2)$ et $M_3(x;x^3)$

- Sur [0;1] , on a :

$0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant x^2 \leqslant x$ (en multipliant par x positif)

$\Rightarrow \quad 0 \leqslant x^3 \leqslant x^2$ (en multipliant à nouveau par x positif)

$\Rightarrow \quad y_{M_3} \leqslant y_{M_2} \leqslant y_{M_1}$

Le point M_1 est donc au-dessus du point M_2 qui est au-dessus du point M_3 .

- Sur $[1;+\infty[$, on a :

$x \geqslant 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 \geqslant x$ (en multipliant par x positif)

$\Rightarrow \quad x^3 \geqslant x^2$ (en multipliant à nouveau par x positif)

$\Rightarrow \quad y_{M_1} \leqslant y_{M_2} \leqslant y_{M_3}$

Le point M_3 est donc au-dessus du point M_2 qui est au-dessus du point M_1 .