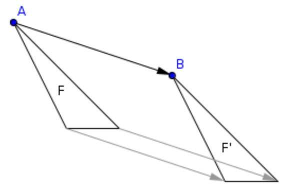
VECTEURS

1) TRANSLATION



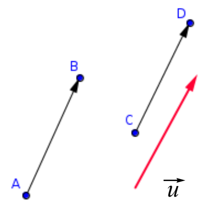
Sur la figure ci-contre la figure F' est l'image de la figure F par la translation qui transforme A en B.
La flèche tracée de A vers B indique la direction, le sens et la longueur du déplacement que l'on doit effectuer pour construire l'image d'un point.

Définition :

Soit A et B deux points du plan.
La translation qui transforme A en B est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Lorsque A et B sont distincts, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est représenté par une flèche allant de A vers B .

2) VECTEURS

Définition :



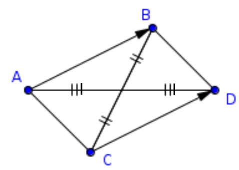
Soit deux points A et B donnés, D l'image de C par la translation qui transforme A en B.
Les points A et B, pris dans cet ordre et les points C et D, pris dans cet ordre. représentent le même **vecteur** $\vec{u}$.

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$$

Cas particulier : $\overrightarrow{AA}$ est le **vecteur nul** . On écrit $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

Remarque : Il existe une infinité de façons de représenter un vecteur $\vec{u}$ car on peu le tracer en chaque point du plan.

Propriété :



Soit A, B, C et D quatre points du plan.

- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ si et seulement $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.
- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ si et seulement si ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati).

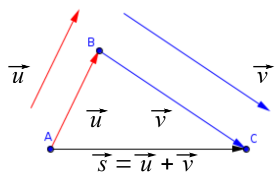
Remarque :

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont donc égaux si et seulement si les trois conditions suivantes sont vraies:

- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles; on dit que les vecteurs ont **même direction**.
- le sens de A vers B est le même que de C vers D ; on dit que les vecteurs ont **le même sens.**
- les segments $[AB]$ et $[CD]$ ont la même longueur; on dit que les vecteurs ont **la même norme**.
  On note $\|\overrightarrow{AB}\|$ la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

3) SOMME DE VECTEURS

Définition :



La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{s}$ résultant de l'enchaînement des translations t de vecteur $\vec{u}$ et t' de vecteur $\vec{v}$. On écrit :

$$\vec{s}=\vec{u}+\vec{v}$$

Remarque :
La somme de trois vecteurs peut se construire à partir de la somme de deux quelconques d'entre eux, puis du troisième.

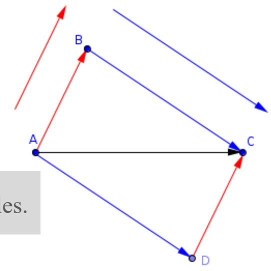
Propriété (relation de Chasles) :

Soit A, B et C trois points du plan . On a :

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} .$$

Propriété (règle du parallélogramme) :

Soit A, B , C et D quatre points du plan.
Si ABCD est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$



Preuve :

Si ABCD est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, donc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, d'après la relation de Chasles.

Remarque :
Lorsque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont dessinés avec une origine commune A, il suffit de dessiner le parallélogramme ABCD pour obtenir le vecteur somme de ces deux vecteurs.

Propriétés :

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$ quatre vecteurs . On a :

- $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
- $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$
- $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$
- si $\vec{u}=\vec{v}$ et $\vec{w}=\vec{t}$ alors $\vec{u}+\vec{w}=\vec{v}+\vec{t}$

Définition :

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs et A et B deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

- On appelle **vecteur opposé** au vecteur $\vec{u}$ le vecteur noté $-\vec{u}$ tel que $-\vec{u}=\overrightarrow{BA}$.
- On appelle **différence** entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le vecteur noté $\vec{u}-\vec{v}$ obtenu en effectuant la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $-\vec{v}$

$$\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$$

Application :
Soit trois points A, B et I. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- I est le milieu du segment [AB].
- $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$
- B est le symétrique de A par rapport à I.
- $\overrightarrow{BI} =- \overrightarrow{AI}$
- $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$

4) COORDONNÉES D'UN VECTEUR DANS LE PLAN

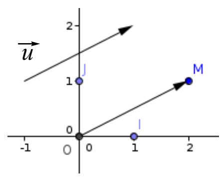
Dans la suite du cours, le plan est muni d'un repère (O, I, J) , pas nécessairement orthonormé.

Définition :

Soit A et B deux points de coordonnées $(x_A ; y_A)$ et $(x_B ; y_B)$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Remarque :
Puisque l'origine O a pour coordonnées $(0 ; 0)$, alors pour tout point M du plan de coordonnées $(x ; y)$,
Les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ sont $\begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix}$, c'est à dire $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



Exemple : $\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OJ}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Propriété :

Soit $\vec{u}$ un vecteur . Pour tous les points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, alors les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont égales.
Les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ sont donc aussi les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$

Définition et propriété :

Une base des vecteurs du plan est un couple ($\vec{i}$, $\vec{j}$) formé de deux vecteurs non nuls qui n'ont pas la même direction.
Une base est **orthonormée** dans le cas où $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont des directions perpendiculaires et ont pour norme 1 unité de longueur.

Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique couple $(x;y)$ tels que $\vec{u}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}$.
On dit que $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$)

Remarque : En notant $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$:

- ($\vec{i}$, $\vec{j}$) est une base des vecteurs du plan.
- On parle alors de repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, plutôt que de repère (O,I,J)

Propriétés :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ dans une base ($\vec{i}$, $\vec{j}$).

- $\vec{u}=\vec{v}$ si et seulement si $x=x'$ et $y=y'$
- $-\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$
- $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$
- $\vec{u}-\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x-x'\\y-y'\end{pmatrix}$

Preuves :

- Conséquence de la propriété précédente.
- Si $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ alors ses coordonnées sont $\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$. $-\vec{u}=\overrightarrow{BA}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_A-x_B\\y_A-y_B\end{pmatrix}$ qui sont bien les opposées de celles de $\vec{u}$.
- Soit A, B et C tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$. D'après la relation de Chasles, on peut dire que $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.
  Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, de $\overrightarrow{BC}$ et de $\overrightarrow{AC}$ sont respectivement $\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}x_C-x_B\\y_C-y_B\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\end{pmatrix}$
  On a bien $(x_B-x_A)+(x_C-x_B)=x_C-x_A$ et $(y_B-y_A)+(y_C-y_B)=y_C-y_A$.
- Puisque $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$, alors $\vec{u}-\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x+(-x')\\y+(-y')\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-x'\\y-y'\end{pmatrix}$.

Propriété :

Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans une base ($\vec{i}$, $\vec{j}$) orthonormée.
La norme du vecteur $\vec{u}$ est $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$

Immédiat en introduisant les points A et B tel que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$
et en utilisant la formule permettant de calculer la longueur AB.

5) PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN RÉEL

Définition :

Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans une base ($\vec{i}$, $\vec{j}$) et k un réel .
Le vecteur $k\,\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$.

On admettra qu'il est indépendant du repère choisi.

Remarques :

- $1\vec{u}=\vec{u}$, $(-1)\vec{u}=-\vec{u}$, $0\vec{u}=\vec{0}$, $2\vec{u}=\vec{u}+\vec{u}$, $3\vec{u}=\vec{u}+\vec{u}+\vec{u}$ ...
- $k\,\vec{u}=\vec{0} \Leftrightarrow k=0$ ou $\vec{u}=\vec{0}$

Définition :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u}=k\,\vec{v}$

Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Remarque :

Dans une base, pour étudier la colinéarité de deux vecteurs non nul $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, on peut déterminer s'il existe un réel k tel que $x'=kx$ et $y'=ky$. (ce qui revient à étudier la proportionnalité des coordonnées)

Propriété : Norme du vecteur $k\vec{u}$

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et pour tout réel k, on a :

$$\|k\vec{u}\|=|k|\|\vec{u}\|$$

Preuve :

On se place dans une base orthonormée. On a $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $k\vec{u}\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$.

$$\|k\vec{u}\|=\sqrt{(kx)^2+(ky)^2}=\sqrt{k^2(x^2+y^2)}=\sqrt{k^2}\sqrt{x^2+y^2}=|k|\sqrt{x^2+y^2}=|k|\|\vec{u}\|$$

Définition :

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan dans une base orthonormée.

Le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre réel $xy'-x'y$.

Ce nombre se note det($\vec{u}$, $\vec{v}$)= $\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}$

Propriété : Condition analytique de colinéarité

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si det($\vec{u}$, $\vec{v}$)=0.

Preuve :

- On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
  - Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$, le résultat est immédiat.
  - Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, alors il existe un nombre réel k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$.

  Ainsi $x=kx'$ et $y=ky'$.
  On a lors : $xy'-x'y=(kx')y'-x'(ky')=0$

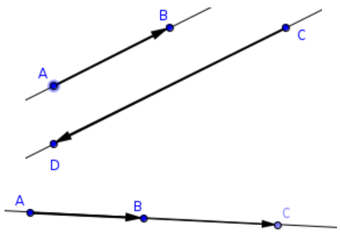
- **Réciproquement**, on suppose que det($\vec{u}$, $\vec{v}$)=0.
  - Si $\vec{v}=\vec{0}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
  - Si $\vec{v}\neq 0$, alors l'une au moins de ses coordonnées est non nulle, par exemple $x'\neq 0$.

  On a alors $y=\frac{x}{x'}y'$, c'est à dire $y=ky'$ où $k=\frac{x}{x'}$.
  Ainsi $\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx';ky')$ et $\vec{u}=k\vec{v}$.
  La démonstration est identique si $y'\neq 0$.

Propriétés :

Soit A , B , C et D quatre points du plan distincts deux à deux.

- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires
- Trois points A,B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.



Remarque :

Les droites (AB) et (CD) sont sécantes si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires.