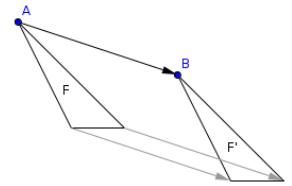


Chapitre 3 - VECTEURS

1) TRANSLATION

Sur la figure ci-contre la figure F' est l'image de la figure F par la translation qui transforme A en B . La flèche tracée de A vers B indique la direction, le sens et la longueur du déplacement que l'on doit effectuer pour construire l'image d'un point.



Définition :

Soit A et B deux points du plan.

La translation qui transforme A en B est appelée translation de vecteur \vec{AB} .

Lorsque A et B sont distincts, le vecteur \vec{AB} est représenté par une flèche allant de A vers B .

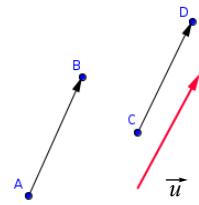
2) VECTEURS

Définition :

Soit deux points A et B donnés, D l'image de C par la translation qui transforme A en B .

Les points A et B , pris dans cet ordre et les points C et D , pris dans cet ordre, représentent le même vecteur \vec{u} .

Cas particulier : \vec{AA} est le **vecteur nul**. On écrit

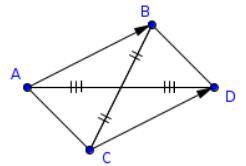


Remarque : Il existe une infinité de façons de représenter un vecteur \vec{u} car on peut le tracer en chaque point du plan.

Propriété :

Soit A , B , C et D quatre points du plan.

- $\vec{AB} = \vec{CD}$ si et seulement $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.
- $\vec{AB} = \vec{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).



Remarque :

Deux vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} sont donc égaux si et seulement si les trois conditions suivantes sont vraies:

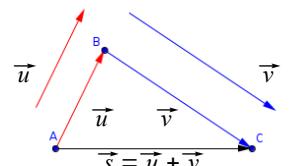
- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles; on dit que les vecteurs ont
- le sens de A vers B est le même que de C vers D ; on dit que les vecteurs ont
- les segments $[AB]$ et $[CD]$ ont la même longueur; on dit que les vecteurs ont
On note $\|\vec{AB}\|$ la norme du vecteur \vec{AB} .

3) SOMME DE VECTEURS

Définition :

La somme de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est le vecteur \vec{s} résultant de l'enchaînement des translations t de vecteur \vec{u} et t' de vecteur \vec{v} . On écrit :

$$\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$$



Remarque :

La somme de trois vecteurs peut se construire à partir de la somme de deux quelconques d'entre eux, puis du troisième.

Propriété (relation de Chasles) :

Soit A , B et C trois points du plan. On a :

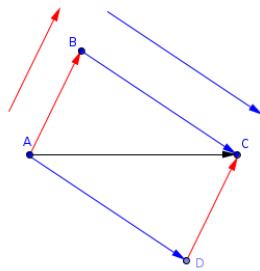
$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$$

Propriété (règle du parallélogramme) :

Soit A, B, C et D quatre points du plan.

Si ABCD est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

Preuve :



Remarque :

Lorsque les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AD} sont dessinés avec une origine commune A, il suffit de dessiner le parallélogramme ABCD pour obtenir le vecteur somme de ces deux vecteurs.

Propriétés :

Soit \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} et \vec{t} quatre vecteurs. On a :

- $\vec{u} + \vec{v} =$
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} =$
- $\vec{u} + \vec{0} =$
- si $\vec{u} = \vec{v}$ et $\vec{w} = \vec{t}$ alors

Définition :

Soit \vec{u} , \vec{v} deux vecteurs et A et B deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

- On appelle **vecteur opposé** au vecteur \vec{u} le vecteur noté $-\vec{u}$ tel que $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$.
- On appelle **différence** entre les vecteurs \vec{u} et \vec{v} , le vecteur noté $\vec{u} - \vec{v}$ obtenu en effectuant la somme des vecteurs \vec{u} et $-\vec{v}$

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

Application :

Soit trois points A, B et I. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- I est le milieu du segment [AB].
-
-
-

4) COORDONNÉES D'UN VECTEUR DANS LE PLAN

Dans la suite du cours, le plan est muni d'un repère (O, I, J) , pas nécessairement orthonormé.

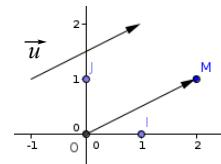
Définition :

Soit A et B deux points de coordonnées $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$.

Les coordonnées de \overrightarrow{AB} sont

Remarque :

Puisque l'origine O a pour coordonnées $(0;0)$, alors pour tout point M du plan de coordonnées $(x; y)$, Les coordonnées de \overrightarrow{OM} sont $\begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix}$, c'est à dire $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



Exemple :

Propriété :

Soit \vec{u} un vecteur. Pour tous les points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, alors les coordonnées des vecteurs \vec{u} et \overrightarrow{AB} sont égales. Les coordonnées d'un vecteur \vec{u} sont donc aussi les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$

Définition et propriété :

Une base des vecteurs du plan est un couple (\vec{i}, \vec{j}) formé de deux vecteurs non nuls qui n'ont pas la même direction.
Une base est **orthonormée** dans le cas où \vec{i} et \vec{j} ont des directions perpendiculaires et ont pour norme 1 unité de longueur.

Pour tout vecteur \vec{u} , il existe un unique couple $(x; y)$ tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
On dit que \vec{u} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans la base (\vec{i}, \vec{j})

Remarque : En notant $\vec{i} = \vec{OI}$ et $\vec{j} = \vec{OJ}$:

- (\vec{i}, \vec{j}) est une base des vecteurs du plan.
- On parle alors de repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, plutôt que de repère (O, I, J)

Propriétés :

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans une base (\vec{i}, \vec{j}) .

- $\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si
- $-\vec{u}$ a pour coordonnées
- $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées
- $\vec{u} - \vec{v}$ a pour coordonnées

Preuves :

- Conséquence de la propriété précédente.
- Si $\vec{u} = \vec{AB}$ alors ses coordonnées sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$. $-\vec{u} = \vec{BA}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix}$ qui sont bien les opposées de celles de \vec{u} .
- Soit A, B et C tels que $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{BC}$. D'après la relation de Chasles, on peut dire que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$. Les coordonnées de \vec{AB} , de \vec{BC} et de \vec{AC} sont respectivement $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$. On a bien $(x_B - x_A) + (x_C - x_B) = x_C - x_A$ et $(y_B - y_A) + (y_C - y_B) = y_C - y_A$.
- Puisque $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$, alors $\vec{u} - \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + (-x') \\ y + (-y') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix}$.

Propriété :

Soit \vec{u} un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans une base (\vec{i}, \vec{j}) orthonormée.

La norme du vecteur \vec{u} est

Immédiat en introduisant les points A et B tel que $\vec{u} = \vec{AB}$ et en utilisant la formule permettant de calculer la longueur AB.

5) PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN RÉEL

Définition :

Soit \vec{u} un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans une base (\vec{i}, \vec{j}) et k un réel.

Le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées

On admettra qu'il est indépendant du repère choisi.

Remarques :

-
-

Définition :

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls.

\vec{u} et \vec{v} sont colinéaires s'il existe un nombre réel k tel que

Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Remarque :

Dans une base, pour étudier la colinéarité de deux vecteurs non nul $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on peut déterminer s'il existe un réel k tel que $x' = kx$ et $y' = ky$. (ce qui revient à étudier la proportionnalité des coordonnées)

Propriété : Norme du vecteur $k \vec{u}$

Pour tout vecteur \vec{u} et pour tout réel k , on a :

Preuve :

On se place dans une base orthonormée. On a $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $k \vec{u} \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Définition :

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan dans une base orthonormée.

Le déterminant des vecteurs \vec{u} et \vec{v} est le nombre réel $xy' - x'y$.

Ce nombre se note $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$

Propriété : Condition analytique de colinéarité

\vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Preuve :

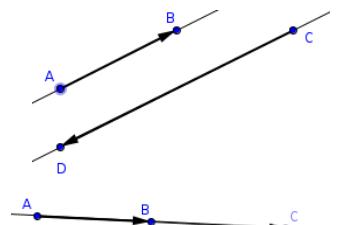
- On suppose que \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.
 - Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, le résultat est immédiat.
 - Si \vec{u} et \vec{v} sont non nuls, alors il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k \vec{v}$.

- **Réiproquement**, on suppose que $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.
 - Si $\vec{v} = \vec{0}$, alors \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.
 - Si $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors l'une au moins de ses coordonnées est non nulle, par exemple $x' \neq 0$. On a alors $y = \frac{x}{x'}$, c'est à dire $y = k y'$ où $k = \frac{x}{x'}$. Ainsi \vec{u} a pour coordonnées $(kx'; ky')$ et $\vec{u} = k \vec{v}$. La démonstration est identique si $y' \neq 0$.

Propriétés :

Soit A, B, C et D quatre points du plan distincts deux à deux.

- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} sont colinéaires
- Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} sont colinéaires.



Remarque :

Les droites (AB) et (CD) sont sécantes si et seulement si