## Les principaux ensembles de nombres

**Ex 1-1 : Compléter par $\in$ ou $\notin$**

1 ) 5 … $\mathbb{N}$ ; 5 … $\mathbb{Z}$ ; 5 … ID ; 5 … $\mathbb{Q}$ ; 5 … $\mathbb{R}$

2 ) $-\frac{45}{9}$ … $\mathbb{N}$ ; $-\frac{45}{9}$ … $\mathbb{Z}$ ; $-\frac{45}{9}$ … ID ; $-\frac{45}{9}$ … $\mathbb{Q}$ ; $-\frac{45}{9}$ … $\mathbb{R}$

3 ) $\frac{7}{8}$ … $\mathbb{N}$ ; $\frac{7}{8}$ … $\mathbb{Z}$ ; $\frac{7}{8}$ … ID ; $\frac{7}{8}$ … $\mathbb{Q}$ ; $\frac{7}{8}$ … $\mathbb{R}$

**Ex 1-2 : Vrai ou faux**

| | $\in \mathbb{N}$ | $\in \mathbb{Z}$ | $\in$ ID | $\in \mathbb{Q}$ | $\in \mathbb{R}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{5}{3}-\frac{7}{3}$ | | | | | |
| $\sqrt{7}$ | | | | | |
| $2{,}8\times10^{5}$ | | | | | |
| $3\times10^{-7}$ | | | | | |
| $\frac{\pi}{5}$ | | | | | |
| $3-\sqrt{5\times8-4}$ | | | | | |
| $\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\right)\times24$ | | | | | |

**Ex 1-3 : Nombres décimaux**

Entourer les nombres rationnels qui appartiennent à ID :

$\frac{5}{2}$ $\frac{5}{3}$ $\frac{10}{26}$ $-\frac{45}{25}$ $\frac{47}{20}$ $-\frac{12}{5}$ $-\frac{28}{3}$

**Ex 1-4 : Nombres rationnels**

Entourer les réels qui appartiennent à $\mathbb{Q}$ :

$8^{456}$ $\frac{\sqrt{3}}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{7}$ $\sqrt{7}+2$ $\frac{5\pi}{7\pi}$ $\frac{\pi}{1000}$ $\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{121}}$ $\frac{3}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}$ 7,5

**Ex 1-5 : Nombres rationnels et développement décimal périodique**

1 ) Tout nombre rationnel admet un développement décimal périodique à partir d'un certain rang.

Par exemple : $\frac{13193}{49950}=0{,}26412412412\ldots$

Mettre en évidence cette propriété avec les nombres rationnels ci-dessous : (utiliser XCAS)

$\frac{45}{17}=$ $\frac{458}{784}=$

2 ) Réciproquement, tout développement décimal illimité périodique correspond à l'écriture d'un rationnel.

a ) Compléter : $y=0{,}00723723723\ldots$

$\Rightarrow$ $1000y = 7{,}23723723723\ldots$

$\Rightarrow$ $1000y = 7{,}23 + y$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$

b ) En déduire l'écriture fractionnaire de 4,24723723723...

**Ex 1-6 : Démonstration par l'absurde : $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel**

Compléter la démonstration ci-dessous pour montrer que $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

Supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel.

$\sqrt{2}>0$ , il existe donc $p\in\mathbb{N}^*$ et $q\in\mathbb{N}^*$ , tel que $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ , où $\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible.

On a alors :

$$\frac{p^2}{q^2}=2 \quad\Rightarrow\quad p^2=2q^2 \quad (1)$$

On en déduit que $p^2$ est un nombre ……………

Le carré d'un nombre impair étant impair, $p$ est donc nécessairement pair.

( En effet : $(2n+1)^2=4n^2+4n+1=2(2n^2+2n)+1$ )

Comme $p$ est pair, il existe $n\in\mathbb{N}$ , tel que :

…………………

En égalisant (1) et (2), on obtient :

…………………

Comme $n^2\in\mathbb{N}$ , on en déduit que $q^2$ est pair, et donc que $q$ est pair.

…………

**Ex 1-7 : Démonstration par l'absurde : $\frac{1}{3}$ n'est pas un décimal**

Compléter la démonstration ci-dessous pour montrer que $\frac{1}{3}\notin$ ID

Supposons que $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal.

Comme $0<\frac{1}{3}<1$ , il existe $n\in\mathbb{N}$ et $p\in\mathbb{N}$ , tels que :

……………

………

Or $10^p$ n'est pas divisible par 3 .

( En effet, les seuls diviseurs premiers de $10^p$ sont 2 et 5 )

………………

**Ex 1-8 :**

Soit A= $5-\frac{x}{2}-\frac{3}{2}$ et B= $\sqrt{y}-\frac{2}{4}+2,7$

1 ) Trouver $x \in \mathbb{Z}$ , tel que $A \in \mathbb{N}$

2 ) Trouver $x \in \mathbb{Z}$ , tel que A $\in$ ID\ $\mathbb{Z}$

3 ) Trouver $y \in \mathbb{R}$ , tel que $B \in \mathbb{N}$

4 ) Trouver $y \in \mathbb{N}$ , tel que B $\in$ ID\ $\mathbb{N}$

**Ex 1-9 : Logique : Vrai ou faux**

Justifier par une démonstration si la réponse est « vrai » ou par un contre exemple si la réponse est « faux ».

1 ) L'inverse d'un nombre décimal non nul est toujours un nombre décimal.

2 ) L'inverse d'un nombre rationnel non nul est toujours un nombre rationnel.

3 ) La somme de deux nombres décimaux est toujours un nombre décimal.

4 ) Le produit de deux nombres rationnels est toujours un nombre rationnel.

## Intervalles

***Pour tous les exercices sur les intervalles, il ne faut pas hésiter à utiliser la droite des réels pour représenter les intervalles, ce qui peut être très pratique pour les intersections et les réunions d'intervalles.***


représentation de $[4;7]$

**Ex 1-10 : QCM**

Dans chaque question, déterminer la (ou les) bonne(s) réponses.
1 ) L'intervalle $]1;3]$ :

| | | | |
|---|---|---|---|
| a ) est borné | b ) est ouvert en 1 | c ) est ouvert en 3 | d ) contient une infinité de nombres réels |

2 ) L'intervalle $]-\infty;5[$ :

| | | | |
|---|---|---|---|
| a ) est borné | b ) contient le nombre 5 | c ) est ouvert en 5 | d ) s'écrit avec le nombre réel $-\infty$ |

3 ) L'ensemble $[0;1[\cup]1;+\infty[$

| | | | |
|---|---|---|---|
| a ) contient 0 | b ) contient 1 | c ) est un intervalle | d ) est l'intersection des intervalles $[0;1[$ et $]1;+\infty[$ |

**Ex 1-11 : Compléter par $\in$ ou $\notin$**

| | | |
|---|---|---|
| $-\frac{1}{5}$ … $]-5;0[$ | $-4$ … $]-\infty;-4[$ | $10^{-7}$ … $]-\infty;0[$ |
| $\frac{1}{3}$ … $[0;0,33]$ | $5^0$ … $\left]\frac{1}{5};1\right]$ | $-3,14$ … $]-5;-\pi]$ |
| 2 … $\{1;3\}$ | 4 … $\mathbb{R}\setminus\{1;4\}$ | $\pi-3$ … $\mathbb{R}^+$ |
| 3 … $]-\infty;3[\cup]3;5[$ | $-7$ … $\mathbb{N}$ | 1 … $[1;5]\cup[3;7]$ |

**Ex 1-12 : Intervalles vers inégalités**

Compléter avec des inégalités :

| | |
|---|---|
| $x\in[-7;3] \Leftrightarrow$ … | $x\in]-\infty;4[ \Leftrightarrow$ … |
| $x\in]-\infty;7[ \Leftrightarrow$ … | $x\in[-2;+\infty[ \Leftrightarrow$ … |
| $x\in]0;3[ \Leftrightarrow$ … | $x\in[2;13[ \Leftrightarrow$ … |

**Ex 1-13 : Inégalités vers intervalles**

Compléter avec des intervalles :

| | |
|---|---|
| $-2<x\leqslant 7 \Leftrightarrow \ldots$ | $x\geqslant -4 \Leftrightarrow \ldots$ |
| $12>x \Leftrightarrow \ldots$ | $5\geqslant x>1 \Leftrightarrow \ldots$ |
| $x\geqslant 1$ et $x\leqslant 4 \Leftrightarrow \ldots$ | $x<0 \Leftrightarrow \ldots$ |

**Ex 1-14 :**

Compléter les phrases suivantes :

1 ) L'ensemble de tous les nombres réels négatifs s'écrit ……

2 ) L'ensemble de tous les nombres réels strictement positif s'écrit ……

3 ) L'ensemble de tous les nombres réels strictement compris entre 7 et 9 s'écrit ……

4 ) L'ensemble vide s'écrit ……

5 ) L'ensemble ne contenant que -2 et 2 s'écrit ……

**Ex 1-15 : Inégalités vers intervalles**

Compléter avec des intervalles :

| |
|---|
| $-1<x<7 \Leftrightarrow \ldots$ |
| $x\leqslant 7 \Leftrightarrow \ldots$ |
| $6x+4\leqslant 0 \Leftrightarrow \ldots$ |
| $-6x+9>0 \Leftrightarrow \ldots$ |
| $\frac{x}{3}>0 \Leftrightarrow \ldots$ |

**Ex 1-16 : Réunion et intersection**

Compléter les égalités suivantes :

| |
|---|
| $]-\infty;2]\cap[1;6[=\ldots$ |
| $]-\infty;2]\cup[1;6[=\ldots$ |
| $]-5;0]\cap]-1;1[=\ldots$ |
| $]-5;0]\cup]-1;1[=\ldots$ |
| $[-5;2]\cap]2;+\infty[=\ldots$ |
| $[-5;2]\cup]2;+\infty[=\ldots$ |
| $]0;4]\cap[4;7[=\ldots$ |
| $]0;4]\cup[4;7[=\ldots$ |
| $]-\infty;5]\cap[-3;0[=\ldots$ |
| $]-\infty;5]\cup[-3;0[=\ldots$ |

**Ex 1-17 : « ou » et « et »**

Compléter les phrases suivantes :

1 ) L'ensemble des réels $x$ tels que $x\geqslant 3$ et $x\leqslant 8$ s'écrit …

2 ) L'ensemble des réels $x$ tels que $x\geqslant 3$ ou $x\leqslant 8$ s'écrit …

3 ) L'ensemble des réels $x$ tels que $x<6$ et $x\leqslant 9$ s'écrit …

4 ) L'ensemble des réels $x$ tels que $x<6$ ou $x\leqslant 9$ s'écrit …

5 ) L'ensemble des réels $x$ tels que $x>3$ et $x\leqslant 0$ s'écrit …

6 ) L'ensemble des réels $x$ tels que $x>3$ ou $x\leqslant 0$ s'écrit …

7 ) L'ensemble de tous les nombres réels sauf $-2$ s'écrit …

8 ) L'ensemble de tous les nombres réels non nuls s'écrit …

## Encadrer et arrondir un réel

**Ex 1-18 : Attention à la calculatrice**

1 ) A l'aide de la calculatrice donner l'arrondi de $\frac{946}{34621}$ , à :

| l'unité | $10^{-1}$ près | $10^{-2}$ près | $10^{-4}$ près | $10^{-5}$ près | $10^{-11}$ près |
|---|---|---|---|---|---|
| … | … | … | … | … | … |

2 ) a ) A l’aide de la calculatrice, donner les arrondis à $10^{-10}$ près de $\frac{8712870}{48506557}$ et $\frac{505149}{2812281}$

b ) Peut-on conclure que ces deux nombres sont égaux ?

3 ) Peut-on dire que les nombres $\pi$ et $\frac{1980127}{630294}$ sont égaux ?

**Ex 1-19 : Encadrement décimal**

Pour chaque nombre, donner, à l’aide de la calculatrice, un encadrement décimal d’amplitude $10^{-3}$ , puis donner l’arrondi au millième :

1 ) $\sqrt{5}$ :

2 ) $-\frac{8}{3}$ :

3 ) $\pi^2$ :

**Ex 1-20 : Encadrements décimaux de $\pi$**

1 ) Vers 250 avant J.-C., Archimède démontre que $\frac{223}{71}<\pi<\frac{22}{7}$ .

a ) Est-ce un encadrement décimal de $\pi$ ?

b ) Déterminer l’amplitude (arrondi au millième) de cet encadrement.

2 ) En Inde, vers 380 avant J.-C. , $3+\frac{177}{1250}$ est utilisé comme valeur approchée de $\pi$ . Est-ce une bonne valeur approchée de $\pi$ ? Si, oui à combien près ?

3 ) En Chine, au 5ème siècle , $\frac{355}{113}$ est utilisé comme valeur approchée de $\pi$ . Est-ce une bonne valeur approchée de $\pi$ ? Si, oui à combien près ?

## Valeur absolue d'un réel

**Ex 1-21 : QCM – restituer les notions du cours**

Parmi les égalités ci-dessous, lesquelles sont vraies ?

a ) $|\sqrt{3}-1|=1-\sqrt{3}$ b ) $|\pi-3|=\pi-3$ c ) $|10^{-5}|=10^{5}$

d ) $|\sqrt{2}-1,5|=1,5-\sqrt{2}$ e ) $\left|-\frac{4}{7}\right|=\frac{4}{7}$ f ) $\left|\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{3}$

g ) $|10^{3}-10^{4}|=10^{3}-10^{4}$ h ) $|10^{-3}-10^{-4}|=10^{-3}-10^{-4}$

**Ex 1-22 :**

Compléter les pointillés par $\leqslant$ ou $\geqslant$ :

a ) $|2,7|$ … $|3,8|$ b ) $|-2,7|$ … $|-2,4|$

c ) $|-\pi|$ … $|3,14|$ d ) $|-1,41|$ … $|-\sqrt{2}|$

**Ex 1-23 : Inégalité concernant $|x|$**

Dans chacun des cas suivants, déterminer une inégalité concernant $|x|$ .

a ) $x<-7$

b ) $x\geqslant 3$

c ) $x\leqslant -4$

d ) $-3\leqslant x\leqslant 8$

e ) $-4<x\leqslant 4$

f ) $-4<x<2$

**Ex 1-24 : Simplifications**

Soit $a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}^-$ . Simplifier :

a ) $|ab|$

b ) $|a+3|$

c ) $|4-b|$

d ) $|b-a|$

e ) $\left|\frac{b}{a}\right|$

f ) $|a| \times |b|$

**Ex 1-25 : Valeur absolue d'un produit et d'un quotient**

1 ) Compléter le tableau ci-dessous :

| $x$ | 3 | -2 | 3 | -4 | 5 | -4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 4 | 3 | -5 | -3 | -7 | 0,1 |
| $\|x\| \times \|y\|$ | | | | | | |
| $xy$ | | | | | | |
| $\|xy\|$ | | | | | | |

2 ) Que peut-on conjecturer concernant la valeur absolue d'un produit de deux réels ?

3 ) Démontrer ce résultat dans les cas ci-dessous :

- $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$

- $x \leqslant 0$ et $y \geqslant 0$

- $x \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$

- $x \leqslant 0$ et $y \leqslant 0$

Conclure.

4 ) Quel résultat analogue peut-on imaginer concernant la valeur absolue d'un quotient ? Démontrer-le.

**Ex 1-26 : $|x|$ *et* $\sqrt{x^2}$**

1 ) Calculer $\sqrt{3^2}$ $\sqrt{7^2}$

$\sqrt{(-11)^2}$ $\sqrt{(-7)^2}$

2 ) Conjecturer une formule permettant de simplifier l'écriture de $\sqrt{x^2}$ .

3 ) Simplifier :

$A = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$

$B = \sqrt{(\sqrt{10}-3)^2}$

**Ex 1-27 : Équation de la forme $|x| = k$**

1 ) Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$ . Quel est l'ensemble des solutions de l'équation $|x| = k$ ?

2 ) Résoudre l'équation $|x| = 0$ .

3 ) Soit $k \in \mathbb{R}_-^*$ .

Déterminer le (ou les ) réel(s) positif(s) solution(s) de l'équation $|x| = k$ .

Déterminer le (ou les ) réel(s) négatif(s) solution(s) de l'équation $|x| = k$ .

Conclure.

4 ) Résoudre par le calcul les équations suivantes :

a ) $|x|=3,5$

b ) $|x|=-2$

c ) $|x|=1-\sqrt{2}$

**Ex 1-28 : Distance entre deux nombres réels**

1 ) Dans chacun des cas, calculer la distance entre les réels :

a ) -4 et 8

b ) $-3\sqrt{2}$ et $-5\sqrt{2}$

c ) $\pi$ et $3\pi$

2 ) Dans chacun des cas, donner une interprétation en terme de distance :

a ) $\left|\frac{1}{3}-\sqrt{2}\right|$

b ) $\left|\sqrt{3}+\frac{1}{7}\right|$

c ) $|x+2|$

d ) $|\sqrt{3}-x|$

**Ex 1-29 : Représenter un ensemble**

1 ) Sur la droite des réels, représenter :

a ) en bleu l'ensemble des réels $x$ , tels que $|x+2|<8$

b ) en vert l'ensemble des réels $x$ , tels que $|x-1|<3$

2 ) Donner tous les entiers appartenant en même temps aux deux ensembles précédents.

**Ex 1-30 : Valeur absolue vers intervalle**

Compléter :

1 ) $|x|\leqslant 8 \iff x \in [\ \dots\ ;\ \dots\ ]$

2 ) $|x-7|<5 \iff \dots$

3 ) $|x|<\frac{2}{3} \iff \dots$

4 ) $|x-\sqrt{3}|\leqslant 5 \iff \dots$

5 ) $|x+2|<5$ …

6 ) $|x|\geqslant 7 \iff \dots$

7 ) $|x-2|\geqslant 3 \iff \dots$

**Ex 1-31 : Intervalle vers valeur absolue**

Compléter :

1 ) $x\in[-8;8] \iff |x|$ …

2 ) $x\in[-7;3]\iff \dots$

3 ) $x\in]2;13[ \iff \dots$

4 ) $x \in ]-\infty;-3]\cup[3;+\infty[ \iff \dots$

5 ) $x \in ]-\infty;-7[\cup]7;+\infty[ \iff \dots$

6 ) $x \in ]-\infty;3]\cup[7;+\infty[ \iff \dots$

**Ex 1-32 : Représenter un ensemble**

1 ) Dans un repère représenter :

a ) en vert l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $|x|=3$

b ) en rouge l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $|y|=2$

2 ) Où sont situés les points tels que $|x|=3$ et $|y|=2$ ?

3 ) Dans ce même repère, représenter l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $|x|\leqslant 3$ et $|y|\leqslant 2$

**Ex 1-33 : Représenter un ensemble**

Dans un repère orthonormé, représenter l'ensemble des points $M(x;y)$

vérifiant : $\begin{cases} x\in\mathbb{Z} \\ y\in\mathbb{N} \\ |x-1|\leqslant 4 \\ |y+1{,}5|>2 \end{cases}$

## Algorithme

**Ex 1-34 : Algorithme de Héron**

L'algorithme de Héron d'Alexandrie (mathématicien grec du 1er siècle) permet de calculer des valeurs approchées de $\sqrt{a}$ ( $a\geqslant 0$ ).

L'idée est la suivante :

On considère un rectangle d'aire $a$ et dont les côtés mesurent $u$ et $\frac{a}{u}$ où $u$ est un nombre positif, si possible proche de $\sqrt{a}$ .

Pour rendre ce rectangle « un peu plus carré », on construit le rectangle de même aire ayant pour longueur d'un côté la moyenne des deux mesures du rectangle précédent : $\dfrac{u+\frac{a}{u}}{2}$

En réitérant indéfiniment l'opération, on construit une suite de longueurs de rectangles qui va tendre vers $\sqrt{a}$ c'est à dire vers la longueur du côté du carré d'aire $a$ .

Pour résumer :

- étape 1 : on choisit un nombre $u$ strictement positif..
- étape 2 : on calcule $\dfrac{u+\frac{a}{u}}{2}$
- étape 3 : on applique à nouveau cette formule en remplaçant $u$ par la valeur trouvée à l'étape précédente.

1 ) Expliquer ce que fait l'algorithme ci-dessous écrit en python :

```
def Racine(a,n) :
    u=1
    for i in range (1,n+1) :
        u=(u+a/u)/2
    return u
```

2 ) Exécuter

Racine(5,3)

Racine(5,7)

Racine (5,10)

Que peut-on reprocher à cette fonction Racine ?

3 ) On souhaite calculer les termes de l'algorithme tant que la distance entre deux termes successifs est supérieure ou égale à un nombre $p$ donné .

Écrire une nouvelle fonction Racine de paramètres $a$ et $p$ qui renvoie la valeur de $\sqrt{a}$ ainsi calculée.