

ENSEMBLES DE NOMBRES

1) LES PRINCIPAUX ENSEMBLES DE NOMBRES

A) DÉFINITIONS ET NOTATIONS

- \mathbb{N} est l'ensemble des **nombres entiers naturels**. $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$

L'ensemble des nombres entiers naturels différents de 0 se note \mathbb{N}^* .

- \mathbb{Z} est l'ensemble des **nombres entiers relatifs (ou nombres entiers)**. $\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$

L'ensemble des nombres entiers différents de 0 se note \mathbb{Z}^* .

Exemples : $27 \in \mathbb{N}$ et $27 \in \mathbb{Z}$; $-32 \in \mathbb{Z}$ et $-32 \notin \mathbb{N}$

- ID est l'ensemble des **nombres décimaux**. (nombres s'écrivant $n \times 10^p$ avec n et p dans \mathbb{Z})

Exemples : $0,26 = 26 \times 10^{-2}$, donc $0,26 \in \text{ID}$; $\frac{1}{3} \notin \text{ID}$

- \mathbb{Q} est l'ensemble des **nombres rationnels**. (nombres que l'on peut écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, p étant un nombre entier et q un entier non nul)

Exemples : $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$; $5 = \frac{5}{1}$, donc $5 \in \mathbb{Q}$; $-12,57 = -\frac{1257}{100}$, donc $-12,57 \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

- On appelle **nombre irrationnel** tout nombre que l'on ne peut pas écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, p étant un nombre entier et q un entier non nul

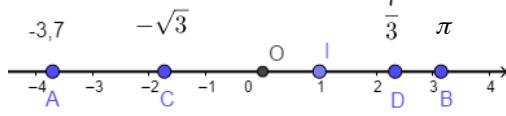
Exemples :

- La longueur d'un carré d'aire 2 cm^2 , noté $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. (Démonstration en exercice)

• π est un nombre irrationnel

- \mathbb{R} est l'ensemble des **nombres réels**, c'est à dire qui sont soit rationnels, soit irrationnels.

\mathbb{R} est l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée munie d'un repère (O, I) .



Exemples : $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (on lit \mathbb{R} privé de \mathbb{Q})

B) SYMBOLE D'INCLUSION

Définition :

Soit A et B deux ensembles :

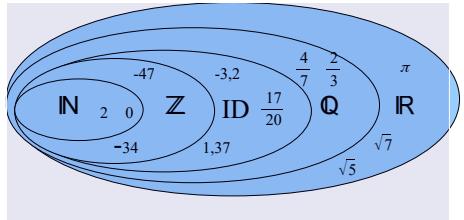
$A \subset B$ se lit : " A est **inclus** dans B ", " A est **contenu** dans B " ou " A est **une partie** de B "

$A \subset B$ signifie que tout élément de l'ensemble A appartient à l'ensemble B.

Si A n'est pas inclus dans B on note : $A \not\subset B$

Exemple : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \text{ID} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$ car par exemple $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ et $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$



2) INTERVALLES

A) DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Remarque préliminaire :

On a vu que sur une droite munie d'un repère (O, I) , à tout point M de cette droite, on peut associer un réel, appelé abscisse de M dans le repère (O, I) . Dans la suite, pour représenter les réels, on se contentera d'utiliser cette droite sans marquer le nom des points.

Cette droite est appelée **droite des réels**.

Définition :

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

L'ensemble des nombres réels vérifiant la double inégalité $a \leq x \leq b$ est appelé **intervalle fermé** a, b de \mathbb{R} noté $[a ; b]$.

Les nombres a et b sont les **bornes** de l'intervalle $[a ; b]$.

$b - a$ est l'**amplitude** de l'intervalle $[a ; b]$. (c'est à dire sa "largeur")

Les différents cas sont représentés dans le tableau ci-dessous.

REPRÉSENTATION	INÉGALITÉ <i>ensemble des réels x vérifiant :</i>	INTERVALLE	
	$a \leq x \leq b$	$[a ; b]$	Intervalle fermé
	$a < x \leq b$	$]a ; b[$	Intervalle ouvert
	$a \leq x < b$	$[a ; b[$	Intervalle semi fermé à gauche (ou semi ouvert à droite)
	$a < x < b$	$]a ; b]$	Intervalle semi fermé à droite (ou semi ouvert à gauche)
	$x \geq a$	$[a ; +\infty[$	Intervalle fermé ($+\infty$, plus l'infini, n'est pas un nombre)
	$x > a$	$]a ; +\infty[$	Intervalle ouvert
	$x \leq a$	$]-\infty ; a]$	Intervalle fermé ($-\infty$, moins l'infini, n'est pas un nombre)
	$x < a$	$]-\infty ; a[$	Intervalle ouvert

Remarques :

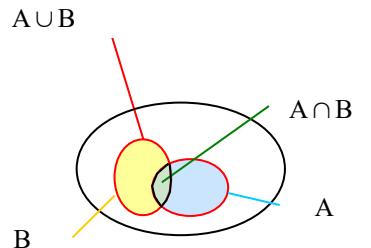
- L'intervalle $]-\infty ; +\infty[$ n'est rien d'autre que \mathbb{R}
- Notation : $\mathbb{R}^+ = [0 ; +\infty[$, $\mathbb{R}^- =]-\infty ; 0]$, $\mathbb{R}_+^* =]0 ; +\infty[$ et $\mathbb{R}_-^* =]-\infty ; 0[$

B) INTERSECTION ET RÉUNION

Définition :

Soit A et B deux ensembles.

- **L'intersection** de ces deux ensembles, noté $A \cap B$ (A inter B), est l'ensemble de tous les éléments communs à A et à B .
- **La réunion** de ces deux ensembles , noté $A \cup B$ (A union B), est l'ensemble de tous les éléments appartenant à A **ou** à B .



Remarque :

- Si deux ensembles A et B n'ont pas d'éléments communs, alors on dit que leur intersection est vide . On note : $A \cap B = \emptyset$
- Notation : $\mathbb{R}^* =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

Exemples :

- $[-5 ; 3] \cap [1 ; 5] =]1 ; 3]$
- $]-3 ; 2[\cup [1 ; 3,5] =]-3 ; 3,5]$
- $[-5 ; 2] \cap [3 ; 7,5] = \emptyset$

3) ENCADRER ET ARRONDIR UN RÉEL

Définitions :

- Donner un **encadrement** décimal d'un réel x , c'est donner deux nombres décimaux a et b tels que $a \leq x \leq b$.
 $b - a$ est appelée **amplitude** de l'encadrement.

On dit qu'un encadrement est à 10^{-n} près (où $n \in \mathbb{N}$) si son amplitude est égale à 10^{-n} .

- **Arrondir** un nombre, c'est lui trouver la valeur la plus proche à une précision donnée.

Exemple :

$3,1 \leq \pi \leq 3,2$ est un encadrement de π d'amplitude 10^{-1}

3,1 est une valeur approchée par défaut de π .

3,2 est une valeur approchée par excès de π .

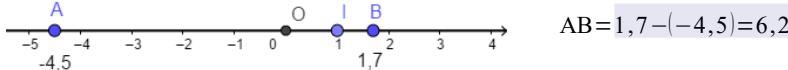
3,1 est l'arrondi de π à 10^{-1} près. (On regarde le chiffre situé juste après la valeur approchée par défaut : si ce chiffre est 0,1,2,3 ou 4, on choisit comme arrondi, la valeur approchée par défaut, sinon on choisit la valeur approchée par excès)

4) VALEUR ABSOLUE

Définition :

La distance entre deux points de la droite des réels est la différence entre l'abscisse la plus grande et l'abscisse la plus petite.

Exemple :



Définition :

Pour tout nombre réel x , la valeur absolue de x (notée $|x|$) est la distance entre x et 0.

On a :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemples :

- $|5|=5$ car 5 est un nombre positif.
- $|-3|=3$ car -3 est un nombre négatif.
- Si x est un nombre réel, $|x^2|=x^2$ car $x^2 \geq 0$.

Remarques :

Pour tout réel x , on a :

- $|x|=0 \Leftrightarrow x=0$
- $|x|=|a| \Leftrightarrow x=a$ ou $x=-a$
- $|-x|=|x|$
- $\sqrt{x^2}=|x|$

Propriété :

La distance entre deux réels a et b est égale à $|b-a|$

La distance entre a et b est la même que la distance entre b et a . On a donc $|b-a|=|a-b|$

Exemple : La distance entre -4 et -7 est $|-4-(-7)|=3$

Propriété :

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^+$.

On dit que les intervalles $[a-r; a+r]$ et $]a-r; a+r[$ ont pour centre a et pour rayon r .

On a :

- $x \in [a-r; a+r] \Leftrightarrow |x-a| \leq r$
- $x \in]a-r; a+r[\Leftrightarrow |x-a| < r$

Exemple :



L'intervalle $[-2; 5]$ a pour amplitude $5-(-2)=7$, pour rayon $\frac{7}{2}=3,5$ et pour centre $\frac{5+(-2)}{2}=1,5$

On a : $x \in [-2; 5] \Leftrightarrow |x-1,5| \leq 3,5$