Chapitre 1 - ENSEMBLES DE NOMBRES

1) LES PRINCIPAUX ENSEMBLES DE NOMBRES

A) DÉFINITIONS ET NOTATIONS

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des **nombres entiers naturels** . $\mathbb{N}=\{0;1;2;3;...\}$

  L'ensemble des nombres entiers naturels différents de 0 se note $\mathbb{N}^*$.

- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des **nombres entiers relatifs (ou nombres entiers)** $\mathbb{Z}=\{...;-3;-2;-1;0;1;2;3;...\}$

  L'ensemble des nombres entiers différents de 0 se note $\mathbb{Z}^*$.

Exemples : ;

- ID est l'ensemble des **nombres décimaux** . (nombres s'écrivant $n \times 10^p$ avec n et p dans $\mathbb{Z}$)

Exemples : ;

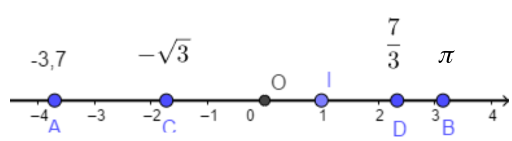
- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des **nombres rationnels** . (nombres que l'on peut écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, p étant un nombre entier et q un entier non nul)

Exemples : ; ;

- On appelle **nombre irrationnel** tout nombre que l'on ne peut pas écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, p étant un nombre entier et q un entier non nul

Exemples :
- La longueur d'un carré d'aire 2 cm^2 , noté $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel . (Démonstration en exercice)
- π et un nombre irrationnel

- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des **nombres réels** , c'est à dire qui sont soit rationnels, soit irrationnels.
  $\mathbb{R}$ est l'ensemble des abscisses des points d'une droite graduée munie d'un repère (O,I).



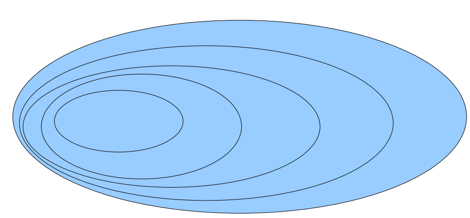
Exemples :

B) SYMBOLE D'INCLUSION

Définition :

> Soit A et B deux ensembles :
>
> A ⊂ B se lit : " A est **inclus** dans B " , " A est **contenu** dans B " ou " A est **une partie** de B "
> A ⊂ B signifie que tout élément de l'ensemble A appartient à l'ensemble B.
> Si A n'est pas inclus dans B on note : A ⊄ B

Exemple : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset$ ID $\subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



2) INTERVALLES

A) DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Remarque préliminaire :
On a vu que sur une droite munie d'un repère (O,I) , à tout point M de cette droite, on peut associer un réel, appelé abscisse de M dans le repère (O,I).
Dans la suite, pour représenter les réels, on se contentera d'utiliser cette droite sans marquer le nom des points.
Cette droite est appelée **droite des réels**.

Définition :

> Soit a et b deux réels tels que $a < b$.
> L'ensemble des nombres réels vérifiant la double inégalité $a \leqslant x \leqslant b$ est appelé **intervalle fermé** a , b de $\mathbb{R}$ noté $[a\,;b]$.
> Les nombres a et b sont les **bornes** de l'intervalle $[a\,;b]$.
> $b-a$ est **l'amplitude** de l'intervalle $[a\,;b]$. (c'est à dire sa " largeur ")

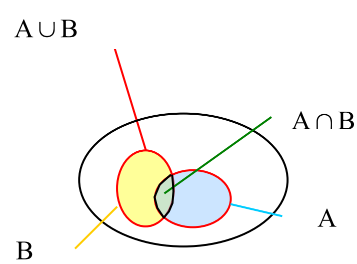
Les différents cas sont représentés dans le tableau ci-dessous.

REPRÉSENTATION	**INÉGALITÉ** *ensemble des réels x vérifiant :*	**INTERVALLE**	
a b —[————]—>		$[a\,;b]$	Intervalle fermé
a b —]————[—>	$a < x < b$		Intervalle ouvert
a b —[————[—>		$[a\,;b[$	Intervalle semi fermé à gauche (ou semi ouvert à droite)
a b —]————]—>	$a < x \leqslant b$	$]a\,;b]$	Intervalle semi fermé à droite (ou semi ouvert à gauche)
a —[—————>	$x \geqslant a$		Intervalle fermé ($+\infty$, *plus l'infini,* n'est pas un nombre)
a —]—————>	$x > a$	$]a\,;+\infty[$	Intervalle ouvert
a —————]——>		$]-\infty\,;a]$	Intervalle fermé ($-\infty$, *moins l'infini,* n'est pas un nombre)
a —————[——>	$x < a$	$]-\infty\,;a[$	Intervalle ouvert

Remarques :

- L'intervalle $]-\infty\,;+\infty[$ n'est rien d'autre que $\mathbb{R}$
- Notation : $\mathbb{R}^+=[0;+\infty[$, $\mathbb{R}^-=]-\infty;0]$, $\mathbb{R}^*_+=]0;+\infty[$ et $\mathbb{R}^*_-=]-\infty;0[$

B) INTERSECTION ET RÉUNION



Définition :

> Soit A et B deux ensembles.
> - **L'intersection** de ces deux ensembles, noté $A \cap B$ (A inter B) , est l'ensemble de tous les éléments communs à A et à B .
> - **La réunion** de ces deux ensembles , noté $A \cup B$ (A union B) , est l'ensemble de tous les éléments appartenant à A **ou** à B .

Remarque :

- Si deux ensembles A et B n'ont pas d'éléments communs, alors on dit que leur intersection est vide . On note : $A \cap B = \emptyset$
- Notation : $\mathbb{R}^* =]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$

Exemples :

- $[-5\,;3]\cap]1\,;5]=$
- $]-3\,;2[\cup[1\,;3{,}5]=$
- $[-5\,;2]\cap[3\,;7{,}5[=$

3) ENCADRER ET ARRONDIR UN RÉEL

Définitions :

> - Donner un **encadrement** décimal d'un réel x , c'est donner deux nombres décimaux a et b tels que $a \leqslant x \leqslant b$.
> $b-a$ est appelée **amplitude** de l'encadrement.
> On dit qu'un encadrement est à 10^{-n} près (où $n \in \mathbb{N}$) si son amplitude est égale à 10^{-n} .
>
> - **Arrondir** un nombre, c'est lui trouver la valeur la plus proche à une précision donnée.

Exemple :

$3,1 \leqslant \pi \leqslant 3,2$ est un encadrement de π d'amplitude 10^{-1}

est une valeur approchée par défaut de π .

est une valeur approchée par excès de π .

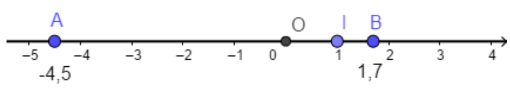
est l'arrondi de π à 10^{-1} près. (On regarde le chiffre situé juste après la valeur approchée par défaut : si ce chiffre est 0,1,2,3 ou 4, on choisit comme arrondi, la valeur approchée par défaut, sinon on choisit la valeur approchée par excès)

4) VALEUR ABSOLUE

Définition :

La distance entre deux points de la droite des réels est la différence entre l'abscisse la plus grande et l'abscisse la plus petite.

Exemple :



AB =

Définition :

Pour tout nombre réel *x*, **la valeur absolue** de *x* (notée $|x|$) est la distance entre x et 0.
On a :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Exemples :

- $|5| = 5$ car 5 est un nombre positif.
- $|-3| = 3$ car -3 est un nombre négatif.
- Si x est un nombre réel, $|x^2| = x^2$ car $x^2 \geqslant 0$.

Remarques :
Pour tout réel x , on a :

- $|x| = 0 \Leftrightarrow$
- $|x| = |a| \Leftrightarrow$
- $|-x| =$
- $\sqrt{x^2} =$

Propriété :

La distance entre deux réels a et b est égale à $|b-a|$

La distance entre a et b est la même que la distance entre b et a . On a donc $|b-a| = |a-b|$

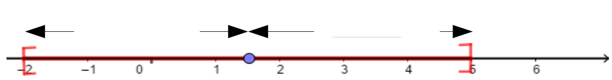
Exemple : La distance entre -4 et -7 est

Propriété :

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^+$.
On dit que les intervalles $[a-r\,;a+r]$ et $]a-r\,;a+r[$ ont pour **centre** a et pour **rayon** r .
On a :

- $x \in [a-r\,;a+r] \Leftrightarrow |x-a| \leqslant r$
- $x \in]a-r\,;a+r[\Leftrightarrow |x-a| < r$

Exemple :



L'intervalle $[-2;5]$ a pour amplitude , pour rayon et pour centre

On a : $x \in [-2;5] \Leftrightarrow$