Équations cartésiennes et vecteurs directeurs

Ex 11-1 : QCM - restituer les notions du cours

Donner la ou les bonne(s) réponse(s).

1) La droite d'équation $x-3=0$ passe par le point de coordonnées :

a) A(0;3) b) B(3;0) c) C(3;3) d) D(0;0)

2) La droite $d:\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y-1=0$ admet aussi pour équation cartésienne :

a) $x+\frac{3}{2}y+3=0$ b) $3x+2x-1=0$ c) $\frac{2}{3}x+y-2=0$ d) $2x+3y=6$

3) La droite $d:ax+by+c=0$ a pour vecteur directeur :

a) $\vec{t}\begin{pmatrix}-b\\-a\end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix}b\\a\end{pmatrix}$ c) $\vec{v}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ d) $\vec{w}\begin{pmatrix}b\\-a\end{pmatrix}$

Ex 11-2 : Déterminer l'équation d'une droite passant par deux points

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Les questions sont indépendantes.

En utilisant le déterminant, déterminer, dans chacun des cas ci-dessous, l'équation de la droite (AB).

1) $A(2;-3)$ et $B(4;1)$

2) $A\left(\frac{1}{2};1\right)$ et $B\left(\frac{1}{4};0\right)$

Ex 11-3 : Déterminer un vecteur directeur

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Déterminer (si possible) un vecteur directeur de la droite d, dont la première coordonnée est 5.

1) $d:x+3y-2=0$

2) $d:x-5=0$

3) $x+y=0$

Ex 11-4 : Équation d'une droite définie par un point et un vecteur directeur.

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

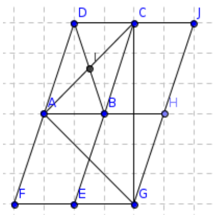
Déterminer l'équation de la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

a) A(3;5) et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

b) A(-1;3) et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

<u>Ex 11-5 :</u> Équations de droites dans des repères différents.

Déterminer les équations des droites (CG) et (AG) dans les repères $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ et $(F;\overrightarrow{FE},\overrightarrow{FA})$.



<u>Ex 11-6 :</u> Droites et points

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Les questions sont indépendantes.

1) Déterminer a et b tels que les deux points A et B soient sur d .

a) $d:2x+y-1=0$ avec $A(2;a)$ et $B(b;5)$

b) $d:x-y-4\sqrt{2}=0$ avec $A(-\sqrt{2};a)$ et $B(b;2\sqrt{2})$

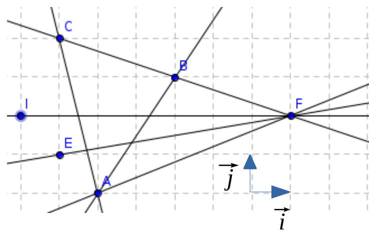
2) Déterminer l'équation de la droite passant par le point A de la droite d et par le point B.

a) $d:x+y+1=0$ avec $A(2;a)$ et $B(2;0)$

b) $d:x-y+1=0$ avec $A(1;a)$ et $B(1;0)$

<u>Ex 11-7 :</u> *Méthode de l'escalier*

Dans la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$), déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur des droites :



(AB)

(AC)

(AF)

(IF)

(EF)

Équations réduites

<u>Ex 11-8 :</u> *QCM - restituer les notions du cours*

Donner la ou les bonne(s) réponse(s).

1) La droite $d:4x+2y-1=0$ admet comme équation réduite :

a) $y=-2x+1$ b) $2y=-4x+1$ c) $y=2x+\frac{1}{2}$ d) $y=-2x+\frac{1}{2}$

2) La droite $d:y=3x-1$ a pour vecteur directeur :

a) $\vec{t}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ c) $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ d) $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

Ex 11-9 : Déterminer un vecteur directeur

Le plan est muni d'un repère $(0;\vec{i},\vec{j})$.
Déterminer un vecteur directeur de la droite d à coordonnées entières.

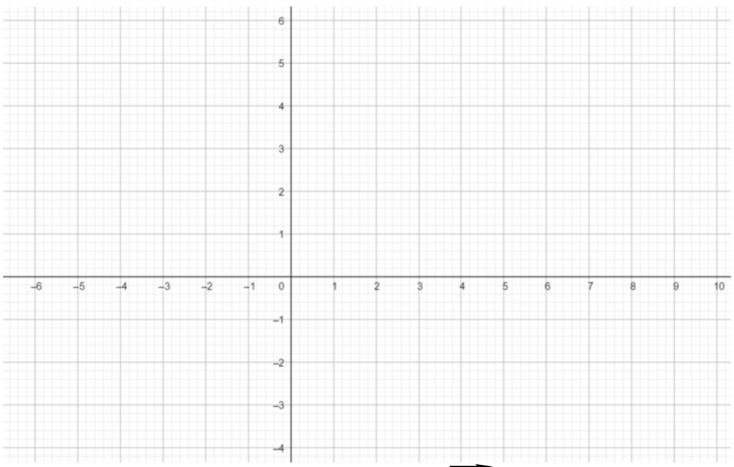
1) $d:y=\frac{7}{3}x+\frac{2}{3}$

2) $d:y=\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}$

Ex 11-10 : Méthode de l'escalier et $\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

1) Tracer un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan et placer les points :

A(2;2) B(6;4) C(1;−1) D(4;−4) E(3;5) F(7;5)



2) a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$. En déduire le coefficient directeur *a* de la droite (AB).

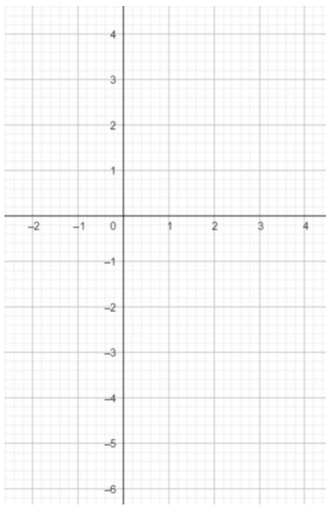
b) Calculer $\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$. Que constate-t-on ?

Quelle nouvelle formule peut-on alors définir ?

c) Déterminer l'équation réduite de la droite (AB).

3) Déterminer les équations réduites (CD) et (EF)

Ex 11-11 : Points alignés



1) Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan, placer :

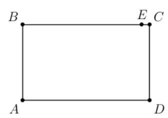
A(−1;3) B(1;−2) C(2;−4) D(3;−7)

2) Calculer l'équation réduite de la droite (AB).

3) Vérifier si les points suivants sont alignés :
a) A, B, C

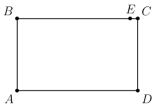
b) A, B, D.

Ex 11-12 : Distance entre deux points



ABCD est un rectangle, les points B, E, C sont alignés dans cet ordre et on donne les mesures suivantes :
AB=3 cm, AD=5 cm, EC=2 mm.
La figure ci-contre n'est pas en vraie grandeur.
1) Justifier que les droites (AB) et (DE) ne sont pas parallèles.

2) Les droites (AB) et (DE) se coupent en F .
À quelle distance du point A se trouve le point F ? Justifier.
On pourra utiliser un repère d'origine A.



<u>Ex 11-13 :</u> Algorithme – Python : droite parallèle à (Oy)

1) Écrire un algorithme qui indique si une droite est parallèle à l'axe des ordonnées ou non, à partir des coordonnées de deux points de cette droite.

2) Traduire cet algorithme en Python.

<u>Ex 11-14 :</u> Algorithme – Python : déterminer l'équation réduite

1) Écrire un algorithme qui calcule l'équation réduite d'une droite, à partir des coordonnées de deux points de cette droite.

2) Traduire cet algorithme en Python.

<u>Ex 11-15 :</u> Algorithme -Python : Vérifier si un point appartient à une droite

1) Écrire un algorithme qui vérifie si un point appartient à une droite (non parallèle à l'axe des ordonnées), à partir des coordonnées de ce point et de l'équation réduite de cette droite.

2) Traduire cet algorithme en Python.

<u>Droites parallèles</u>

<u>Ex 11-16 :</u>

1) Soit $d: 2x+y-1=0$. Déterminer les droites parallèles à d .

a) $d_1: 2x+y+2=0$ b) $d_2: x+y-3=0$

c) $d_3: 4x+2y-1=0$ d) $d_4: -2x+y-1=0$

2) Soit $d: y=3x-1$. Déterminer les droites parallèles à d .

a) $d_1: 2x-3y+1=0$ b) $d_2: 3x-y+3=0$

c) $d_3: 6x+2y-1=0$ d) $d_4: -6x+2y+1=0$

3) Soit $d: -x+3y-\frac{3}{2}=0$. Déterminer les droites parallèles , sécantes ou confondues avec la droite d .

a) $d_1: 2x-6y+3=0$

b) $d_2: 2x+6y-3=0$

c) $d_3: x-3y-1=0$

d) $d_4: -2x+6y-1=0$

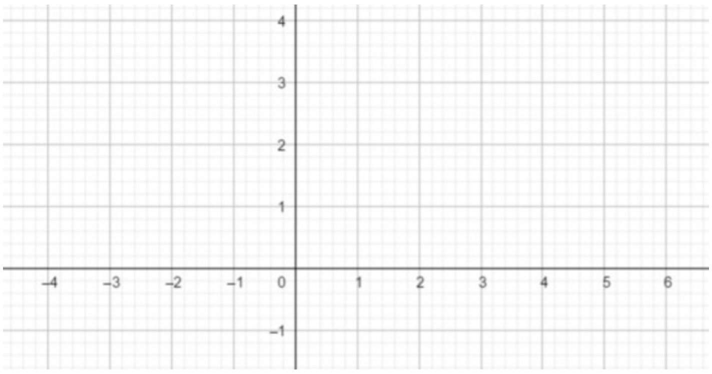
<u>Ex 11-17 :</u> *Équation cartésienne de la droite passant par un point et parallèle à une autre droite*

Le plan est muni d'un repère $(0;\vec{i},\vec{j})$.

Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par A(-1;1) et parallèle à $d: x-2y+1=0$.

Ex 11-18 : ***Équation réduite de la droite passant par un point et parallèle à une autre droite***

1) Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan, placer A(−2;2) B(2;3) C(−2;0)



2) Calculer l'équation réduite de la droite (AB)

3) Tracer la droite (d) parallèle à (AB) passant par C. Quel est son coefficient directeur ?

4) Calculer l'équation de la droite (d) .

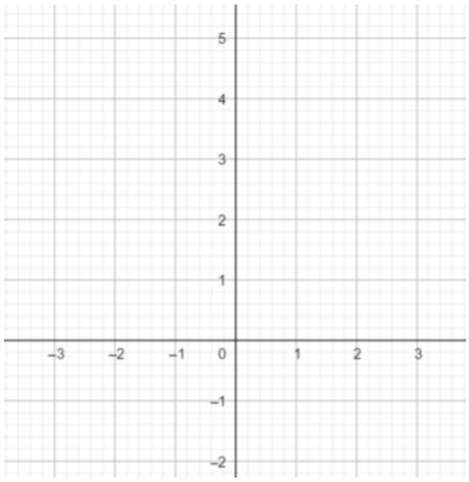
Ex 11-19 : Droites parallèles ?

Voici les équations réduites de plusieurs droites. Sans tracer ces droites, indiquer les droites parallèles.

$(d_1): y=-5x+2$	$(d_2): y=1,5$	$(d_3): y=x+7$	$(d_4): x=-4$
$(d_5): y=-5x-5$	$(d_6): y=7$	$(d_7): x=11$	$(d_8): y=5x+2$
$(d_9): y=x$	$(d_{10}): y=5x+2$	$(d_{11}): y=\frac{1}{5}x+2$	$(d_{12}): y=-5$

Ex 11-20 : Droite parallèle à une autre passant par un point

1) Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan, placer A(−1;3) et B(2;0)



2) Tracer la droite (d_1) d'équation réduite : $y=2x-1$

3) Calculer les équations réduites :

a) de la droite (AB) ;

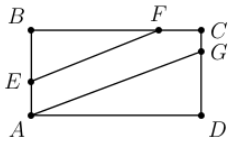
b) de la droite (d_2) , parallèle à (OJ) passant par A ;

c) de la droite (d_3) , parallèle à (OI) passant par A ;

d) de la droite (d_4) , parallèle à (d_1) passant par A.

Ex 11-21 : Droites parallèles ?

ABCD est un rectangle, les points A, E, B, les points B, F , C et les points C, G, D sont alignés dans cet ordre et on donne les mesures suivantes :



AB=5 cm, AD=7 cm, AE=2 cm, BF=5 cm, CG=8 mm.

La figure ci-contre n'est pas en vraie grandeur.
Les droites (EF) et (AG) sont-elles parallèles ? On pourra utiliser un repère d'origine A.

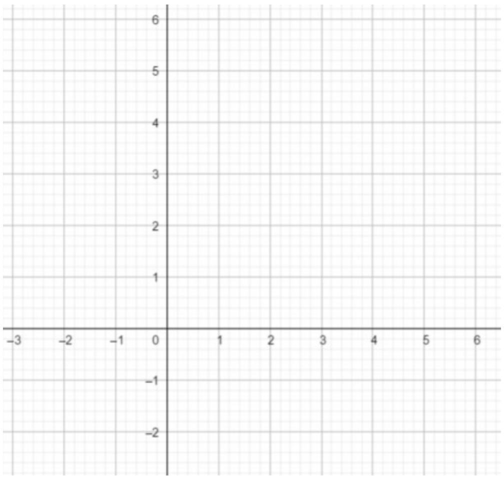
<u>Ex 11-22 :</u> Intersections de deux droites

1) Dans un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\vec{j})$, tracer les droites (d_1) , (d_2) , (d_3) d'équations :

$(d_1): y=3x-2$

$(d_2): y=-2x+8$

$(d_3): x=4$



2) a) Justifier pourquoi les droites (d_1) et (d_2) sont sécantes.

b) Calculer les coordonnées du point K, intersection des droites (d_1) et (d_2) .

c) Calculer les coordonnées du point L, intersection des droites (d_1) et (d_3) .

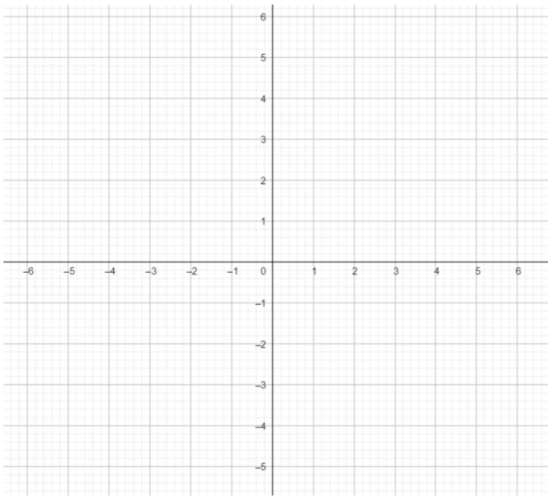
Régionnement du plan

<u>Ex 11-23 :</u>

1) a) Tracer la droite d'équation $x+2y-1=0$

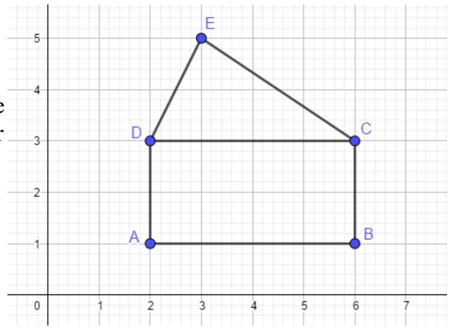
b) Hachurer en vert l'ensemble des points du plan tels que $x+2y-1>0$

2) Hachurer en rouge l'ensemble des points du plan tels que $x+2y-1<0$



<u>Ex 11-24 :</u>

1) Soit $\mathrm{M}(x\,;y)$ un point du plan.
Quelles inégalités peut-on écrire avec les coordonnées de M pour traduire son appartenance à l'intérieur du rectangle ?



2) Même question pour le triangle CDE.

Systèmes de deux équations à deux inconnues

Ex 11-25 :

Pour chacun des systèmes ci-dessous :
- vérifier que le système a une solution ou pas.
- faire une résolution par substitution
- faire une résolution par combinaison.

a) $\begin{cases} x-3y=11 \\ x+y=8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x-y=4 \\ x+2y=5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x-3y=8 \\ x-y=2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x-4y=5 \\ 3x+5y=-4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x-5y=-4 \\ -6x+10y=8 \end{cases}$

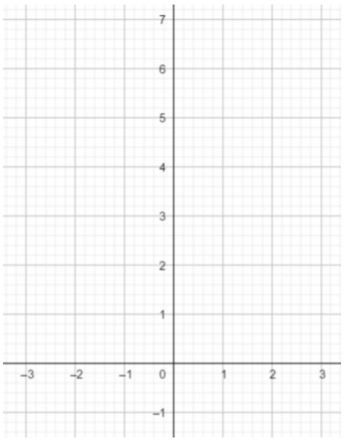
Ex 11-26 :

1) Résoudre algébriquement ce système par combinaison : $\begin{cases} 2x+y=6 \\ x+2y=10 \end{cases}$

2) Transformer ces deux équations sous la forme $y = mx + p$

3) Tracer un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, et tracer les droites correspondant à ces deux équations.

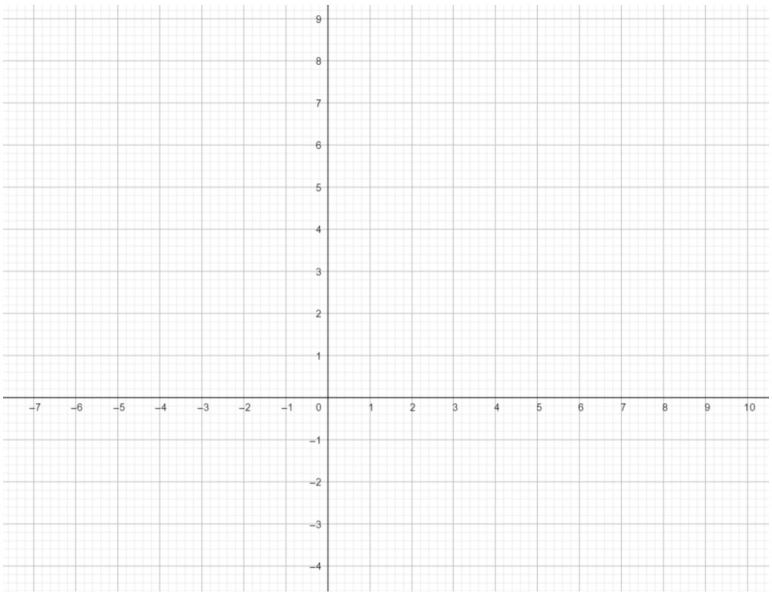
4) Retrouver graphiquement le couple solution du système de la question 1).



Ex 11-27 :

Retrouver graphiquement les solutions des systèmes suivants (Ex 11-25) :

$\begin{cases} x-3y=11 \\ x+y=8 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-y=4 \\ x+2y=5 \end{cases}$



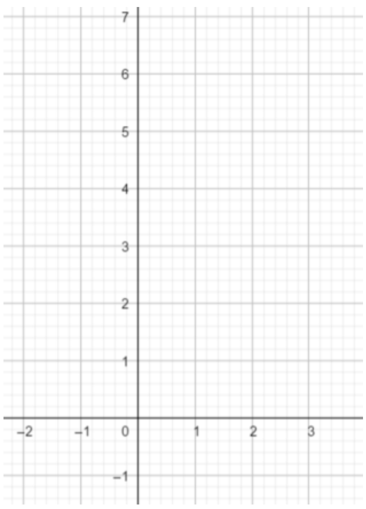
Ex 11-28 :

On considère le système suivant : $\begin{cases} 2x+y=6 \\ 4x+2y=10 \end{cases}$

1) Transformer ces deux équations sous la forme $y = mx + p$

2) Tracer un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, et tracer les droites correspondant à ces deux équations.

3) Expliquer géométriquement pourquoi ce système n'a pas de solution.



4) Que dire du système $\begin{cases} 2x+y=6 \\ 4x+2y=12 \end{cases}$?

Mises en équation

Ex 11-29 : Différence et quotient

La différence de deux nombres est 5. Le quotient du plus grand par le plus petit est également 5.
Traduire cette situation par un système linéaire d'équations à deux inconnus, puis déterminer ces deux nombres.

Ex 11-30 : Terrain rectangulaire

Un terrain rectangulaire est trois fois plus long que large. Son périmètre est de 176 mètres.
Traduire cette situation par un système linéaire d'équations à deux inconnus, puis déterminer les dimensions du terrain.

<u>Ex 11-31 :</u> Somme d'argent

Amine et Ghita ont chacun une certaine somme. Si Amine donne 1,50 euros à Ghita ils auront la même somme. Toutefois, si Ghita donne 3 euros à Amine, ce dernier aura le double de ce qui restera à Ghita.
Traduire cette situation par un système linéaire d'équations à deux inconnus, puis déterminer la somme de chacun d'eux.

<u>Ex 11-32 :</u> Café de deux qualités

Un marchand vend du café de deux qualités.
Lorsqu'il prend 2 kg de la première qualité et 3 kg de la seconde, le kilogramme de ce mélange vaut 6 euros.
Lorsqu'il prend 3 kg de la première qualité et 2 kg de la seconde, le kilogramme de ce mélange vaut 6,40 euros.
Traduire cette situation par un système linéaire d'équations à deux inconnus, puis déterminer le prix au kilogramme de chaque qualité ?

<u>Ex 11-33 :</u> Déplacements d'un représentant

Chaque jour, le représentant d'une compagnie A reçoit pour ses déplacements une somme de 10 euros et, en plus, 0,25 euros le kilomètre.
Le représentant d'une compagnie B reçoit 0,30 euros le kilomètre et a reçu 25 euros de moins que celui de la compagnie A.
Ensemble, ils ont parcouru 500 kilomètres.
Traduire cette situation par un système linéaire d'équations à deux inconnus, puis déterminer la somme de chacun d'eux.

<u>Ex 11-34 :</u> Médianes d'un triangle

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan, on considère le triangle ABC avec A(2;1), B(-3;2) et C(7 ;-3).

1) Déterminer une équation de la médiane issue de A, puis une équation de la médiane issue de B dans le triangle ABC.

2) En déduire les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC, point d'intersection des médianes.

<u>Des systèmes particuliers</u>

<u>Ex 11-35 :</u>

Résoudre les systèmes d'équations suivants :

1) $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ 3x^2-2y^2=-6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{y}=3 \\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{7}{y}=40 \end{cases}$

Systèmes de trois équations à trois inconnues

Ex 11-36 :

Résoudre algébriquement ce système par combinaison :

$$\begin{cases} x+2y+2z-5=4 \left(\mathrm{L}_1\right) \\ 2x-3y+z=-2 \left(\mathrm{L}_2\right) \\ -x+y-3z=3 \left(\mathrm{L}_3\right) \end{cases}$$