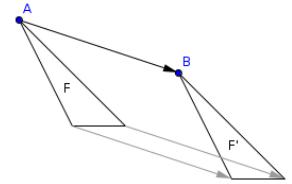


# VECTEURS

## 1) TRANSLATION

Sur la figure ci-contre la figure  $F'$  est l'image de la figure  $F$  par la translation qui transforme  $A$  en  $B$ . La flèche tracée de  $A$  vers  $B$  indique la direction, le sens et la longueur du déplacement que l'on doit effectuer pour construire l'image d'un point.



### Définition :

Soit  $A$  et  $B$  deux points du plan.

La translation qui transforme  $A$  en  $B$  est appelée translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .

Lorsque  $A$  et  $B$  sont distincts, le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est représenté par une flèche allant de  $A$  vers  $B$ .

## 2) VECTEURS

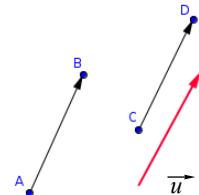
### Définition :

Soit deux points  $A$  et  $B$  donnés,  $D$  l'image de  $C$  par la translation qui transforme  $A$  en  $B$ .

Les points  $A$  et  $B$ , pris dans cet ordre et les points  $C$  et  $D$ , pris dans cet ordre, représentent le même vecteur  $\vec{u}$ .

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

Cas particulier :  $\overrightarrow{AA}$  est le vecteur nul. On écrit  $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

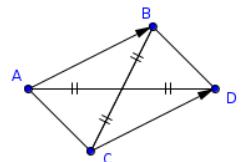


**Remarque :** Il existe une infinité de façons de représenter un vecteur  $\vec{u}$  car on peut le tracer en chaque point du plan.

### Propriété :

Soit  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  quatre points du plan.

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  si et seulement  $[AD]$  et  $[BC]$  ont le même milieu.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  si et seulement si  $ABDC$  est un parallélogramme (éventuellement aplati).



### Remarque :

Deux vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont donc égaux si et seulement si les trois conditions suivantes sont vraies:

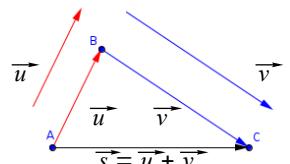
- Les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles; on dit que les vecteurs ont même direction.
- le sens de  $A$  vers  $B$  est le même que de  $C$  vers  $D$ ; on dit que les vecteurs ont le même sens.
- les segments  $[AB]$  et  $[CD]$  ont la même longueur; on dit que les vecteurs ont la même norme.

## 3) SOMME DE VECTEURS

### Définition :

La somme de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est le vecteur  $\vec{s}$  résultant de l'enchaînement des translations  $t$  de vecteur  $\vec{u}$  et  $t'$  de vecteur  $\vec{v}$ . On écrit :

$$\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$$



### Remarque :

La somme de trois vecteurs peut se construire à partir de la somme de deux quelconques d'entre eux, puis du troisième.

### Propriété (relation de Chasles) :

Soit  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points du plan. On a :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

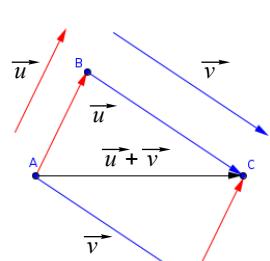
### Propriété (règle du parallélogramme) :

Soit  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  quatre points du plan.

Si  $ABCD$  est un parallélogramme, alors  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

### Preuve :

Si  $ABCD$  est un parallélogramme, alors  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ , donc  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ , d'après la relation de Chasles.



### Remarque :

Lorsque les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AD}$  sont dessinés avec une origine commune  $A$ , il suffit de dessiner le parallélogramme  $ABCD$  pour obtenir le vecteur somme de ces deux vecteurs.

### Propriétés :

Soit  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{w}$  et  $\vec{t}$  quatre vecteurs. On a :

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
- si  $\vec{u} = \vec{v}$  et  $\vec{w} = \vec{t}$  alors  $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v} + \vec{t}$

### Définition :

Soit  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  deux vecteurs et  $A$  et  $B$  deux points tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ .

- On appelle **vecteur opposé** au vecteur  $\vec{u}$  le vecteur noté  $-\vec{u}$  tel que  $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$ .
- On appelle **différence** entre les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , le vecteur noté  $\vec{u} - \vec{v}$  obtenu en effectuant la somme des vecteurs  $\vec{u}$  et  $-\vec{v}$

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

### Application :

Soit trois points  $A$ ,  $B$  et  $I$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- $I$  est le milieu du segment  $[AB]$ .
- $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$
- $B$  est le symétrique de  $A$  par rapport à  $I$ .
- $\overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{AI}$
- $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$

## 4) COORDONNÉES D'UN VECTEUR DANS LE PLAN

Dans la suite du cours, le plan est muni d'un repère  $(O, I, J)$

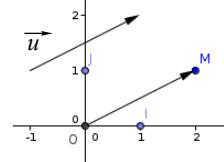
### Définition :

Soit  $A$  et  $B$  deux points de coordonnées  $(x_A; y_A)$  et  $(x_B; y_B)$ .

Les coordonnées de  $\overrightarrow{AB}$  sont  $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ .

### Remarque :

Puisque l'origine  $O$  a pour coordonnées  $(0; 0)$ , alors pour tout point  $M$  du plan de coordonnées  $(x; y)$ , les coordonnées de  $\overrightarrow{OM}$  sont  $\begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 0 \end{pmatrix}$ , c'est à dire  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .



**Exemple :**  $\overrightarrow{OI} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\overrightarrow{OJ} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

### Remarque :

On note  $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$  et  $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ . On parle alors de repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , plutôt que de repère  $(O, I, J)$ .

### Propriété :

Soit  $\vec{u}$  un vecteur. Pour tous les points  $A$  et  $B$  tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ , alors les coordonnées des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\overrightarrow{AB}$  sont égales.

### Remarque :

Les coordonnées d'un vecteur  $\vec{u}$  sont donc aussi les coordonnées du point  $M$  tel que  $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$

### Propriétés :

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs de coordonnées respectives  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ .

- $\vec{u} = \vec{v}$  si et seulement si  $x = x'$  et  $y = y'$
- $-\vec{u}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$
- $\vec{u} + \vec{v}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$
- $\vec{u} - \vec{v}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \end{pmatrix}$

### Preuves :

- Conséquence de la propriété précédente.
- Si  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  alors ses coordonnées sont  $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ .  $-\vec{u} = \overrightarrow{BA}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \end{pmatrix}$  qui sont bien les opposées de celles de  $\vec{u}$ .

- Soit  $A$ ,  $B$  et  $C$  tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ . D'après la relation de Chasles, on peut dire que  $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ . Les coordonnées de  $\overrightarrow{AB}$ , de  $\overrightarrow{BC}$  et de  $\overrightarrow{AC}$  sont respectivement  $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ . On a bien  $(x_B - x_A) + (x_C - x_B) = x_C - x_A$  et  $(y_B - y_A) + (y_C - y_B) = y_C - y_A$ .
- Puisque  $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$ , alors  $\vec{u} - \vec{v}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x + (-x') \\ y + (-y') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix}$ .

## 5) PRODUIT D'UN VECTEUR PAR UN RÉEL

### Définition :

Soit  $\vec{u}$  un vecteur de coordonnées  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $k$  un réel.

Le vecteur  $k\vec{u}$  est le vecteur de coordonnées  $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ .

On admettra qu'il est indépendant du repère choisi.

### Remarques :

- $1\vec{u} = \vec{u}$ ,  $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$ ,  $0\vec{u} = \vec{0}$ ,  $2\vec{u} = \vec{u} + \vec{u}$ ,  $3\vec{u} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$  ...
- $k\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow k = 0$  ou  $\vec{u} = \vec{0}$

### Définition :

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls.

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires s'il existe un nombre réel  $k$  tel que  $\vec{u} = k\vec{v}$

Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

### Remarque :

Dans un repère, pour étudier la colinéarité de deux vecteurs non nul  $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ , on peut déterminer s'il existe un réel  $k$  tel que  $x' = kx$  et  $y' = ky$ . (ce qui revient à étudier la proportionnalité des coordonnées)

On peut aussi introduire la propriété suivante, appelée « condition analytique de colinéarité »  
 $\overrightarrow{u}$  et  $\overrightarrow{v}$  sont colinéaires si et seulement si  $xy' - x'y = 0$ .

Ce nombre se note  $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$

Ce résultat est immédiat si l'un des vecteurs est nul et traduit la proportionnalité des coordonnées si les deux vecteurs sont non nuls.

### Remarque :

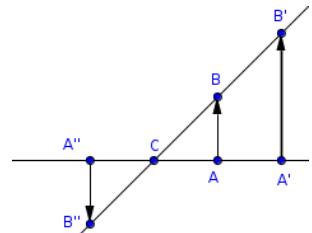
Soit  $A$ ,  $B$ ,  $A'$  et  $B'$  quatre points du plan.

- Si une homothétie de rapport  $\lambda$  transforme  $A$  en  $A'$  et  $B$  en  $B'$ , alors  $\overrightarrow{A'B'} = \lambda \overrightarrow{AB}$

- Si une symétrie centrale transforme  $A$  en  $A'$  et  $B$  en  $B'$ , alors  $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$

### Exemple :

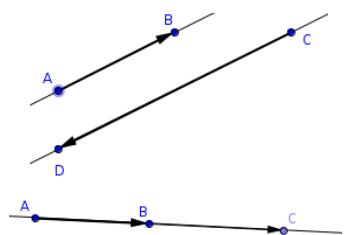
- Les points  $A'$  et  $B'$  sont les images respectives des points  $A$  et  $B$  par l'homothétie de centre  $C$  et de rapport 2. On a  $\overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{AB}$ .
- Les points  $A''$  et  $B''$  sont les images respectives des points  $A$  et  $B$  par l'homothétie de centre  $C$  et de rapport -1, c'est à dire par la symétrie centrale de centre  $C$ . On a  $\overrightarrow{A''B''} = -\overrightarrow{AB}$ .



### Propriétés :

Soit  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  quatre points du plan distincts deux à deux.

- Les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont colinéaires
- Trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires.



### Remarque :

Les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont sécantes si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  ne sont pas colinéaires.