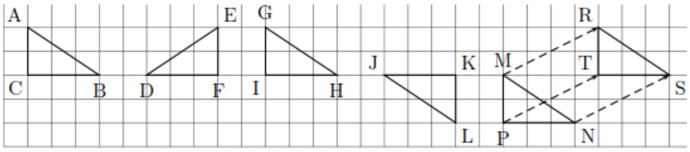
Translations et vecteurs

Ex 1 : ***Reconnaître une transformation***



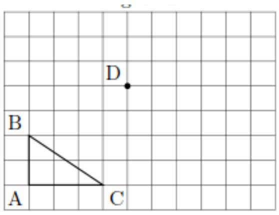
1) Le triangle DEF est l'image du triangle ABC par une transformation. Laquelle?

2) Le triangle JKL est l'image du triangle GIH par une transformation. Laquelle?

3) Le triangle RST est l'image du triangle MNP par une transformation. Laquelle? Caractériser cette transformation.

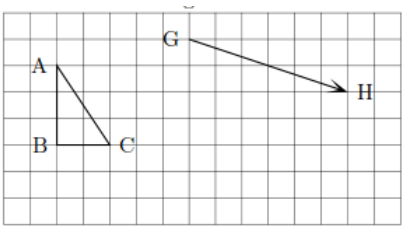
Ex 2 : ***Image d'un triangle***

On translate le triangle ABC de façon à amener le point A sur le point D . Tracer DEF l'image du triangle ABC par la translation de vecteur AD .

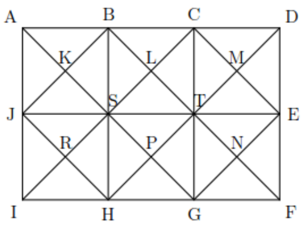


Ex 3 : ***Image d'un triangle***

Tracer le triangle DEF, image du triangle ABC par la translation de vecteur $\overrightarrow{GH}$.



Ex 4 : ***Image d'une figure***



1) Quelle est l'image du triangle AJS par la translation de vecteur $\overrightarrow{AT}$?

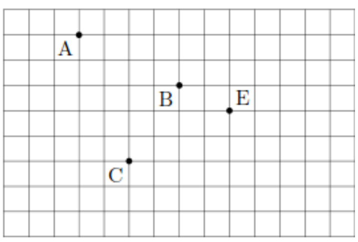
2) Quelle est l'image du triangle STG par la translation de vecteur $\overrightarrow{JB}$?

3) Quelle est l'image du rectangle $BDES$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{BJ}$?

4) Quelle est l'image du triangle TNG par la translation de vecteur $\overrightarrow{SB}$?

Égalité de deux vecteurs

Ex 5 : ***Caractériser l'égalité de deux vecteurs***



1) Tracer le point D image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$?

2) Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$ (le tracer) ?

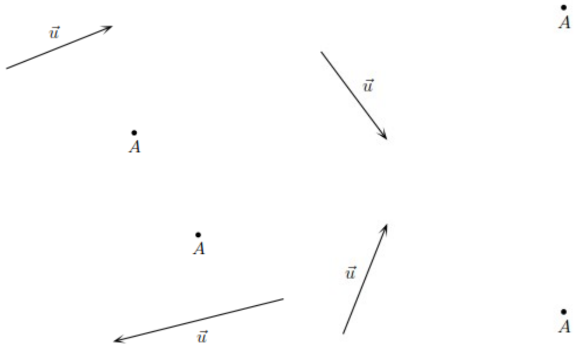
3) Que sait-on alors pour les segments $[AD]$ et $[BC]$?

4) Tracer le point F image du point E par la même translation.

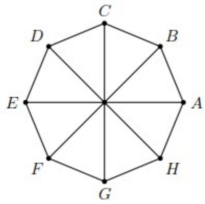
5) Que constate-t-on pour le milieu du segment $[AF]$ et le milieu du segment $[BE]$?

Ex 6 : ***Construction à la règle et au compas***

Construire chaque fois, à la règle et au compas, le point B tel que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$



Ex 7 : ***Vecteurs égaux et opposés***



$ABCDEFGH$ est un octogone régulier de centre O .

1) Compléter le tableau suivant par oui ou par non.

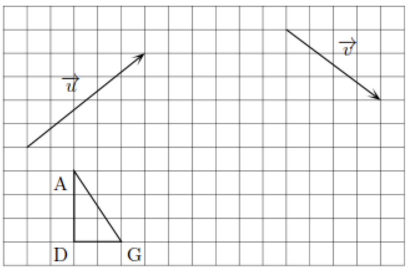
Les vecteurs	$\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{BC}$	$\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BD}$	$\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{HB}$	$\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{ED}$
ont la même direction				
ont le même sens				
ont la même longueur				
sont égaux				

2) Indiquer chaque fois si l'affirmation est vraie ou fausse.

- $\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont égaux ......
- $\overrightarrow{FE}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés ......
- $\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{OE}$ sont opposés ......
- $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont de sens opposés ......

Somme de vecteurs

Ex 8 : ***Découvrir la somme de vecteurs et la relation de Chasles***



1) L'image du triangle ADG par la translation de vecteur $\vec{u}$ est le triangle BEH . Le tracer

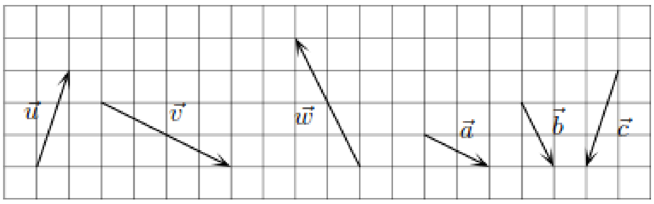
2) L'image du triangle BEH par la translation de vecteur $\vec{v}$ est le triangle CFI . Le tracer.

3) Tracer le vecteur $\vec{w}$ de la translation qui transforme directement ADG en CFI .
Ce vecteur $\vec{w}$ est **la somme des vecteurs** $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On note : $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$

4) Tracer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$. On constate alors ce qu'on appelle **la relation de Chasles** : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

Ex 9 : ***Construire le vecteur somme***

Placer un point sur le quadrillage, et à partir de ce point , construire les sommes : $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{v}+\vec{w}$, $\vec{u}+\vec{w}$, $\vec{v}+\vec{a}$, $\vec{w}+\vec{b}$, $\vec{u}+\vec{c}$
(Prendre un nouveau point à chaque fois)



Ex 10 : ***Compléter***

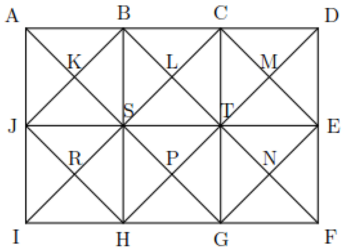
$\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{BH}=\dots$ $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}=\dots$

$\overrightarrow{FH}+\overrightarrow{HT}=\dots$

$\overrightarrow{HS}+\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{HS}+\overrightarrow{S...}=\overrightarrow{H...}$

$\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BS}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{C...}=\overrightarrow{D...}$

$\overrightarrow{JS}+\overrightarrow{JB}=\overrightarrow{JS}+\overrightarrow{S...}=\overrightarrow{J...}$



$\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{G...}=\overrightarrow{F...}$

Ex 11 : ***Découvrir la construction du parallélogramme***

1) Tracer un parallélogramme $ABCD$.

2) Compléter :

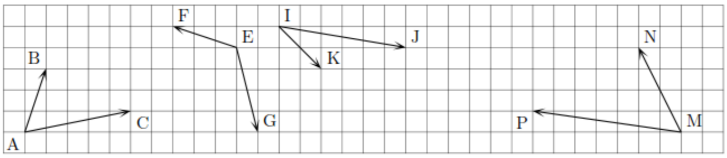
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B...}=\overrightarrow{A...}$$

Cette construction est une deuxième méthode de construction de la somme de deux vecteurs, c'est la construction du parallélogramme.

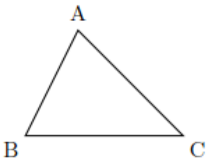
Ex 12 : ***Construction du parallélogramme***

En utilisant la construction du parallélogramme, construire les points D , H , L et R tels que :

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{IL}$ et $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MR}$



Ex 13 : ***Construction à la règle et au compas***



Construire à la règle et au compas les points D et E tels que :

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$

Ex 14 : ***Démonstration***

1) Sur une feuille non quadrillée, tracer un parallélogramme $ABCD$ de centre O .

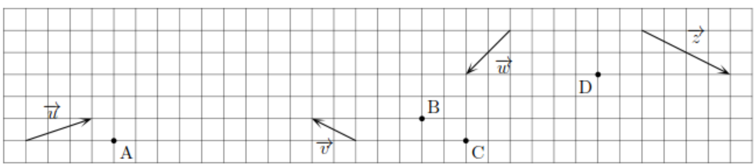
2) Construire les points E et F tels que : $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OF}$

3) Quelle est la nature des quadrilatères $OBEC$ et $OCFD$? Justifier.

4) Que peut-on dire du point C par rapport au segment $[EF]$?
Le démontrer.

Produit d'un vecteur par un nombre réel

Ex 15 : ***Construction***



1) À partir du point A, tracer le vecteur $2\vec{u}=\vec{u}+\vec{u}$

2) Tracer chaque fois le vecteur indiqué à partir du point indiqué.

a) Le vecteur $3\vec{v}$ à partir du point B

b) Le vecteur $-2\vec{w}$ à partir du point C

c) Le vecteur $1{,}5\vec{z}$ à partir du point D

Ex 16 :

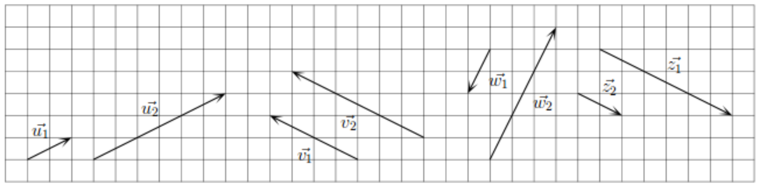
Déterminer chaque fois le nombre indiqué.

1) le nombre a tel que $a\vec{u}_1=\vec{u}_2$

2) le nombre b tel que $b\vec{u}_1=\vec{u}_2$

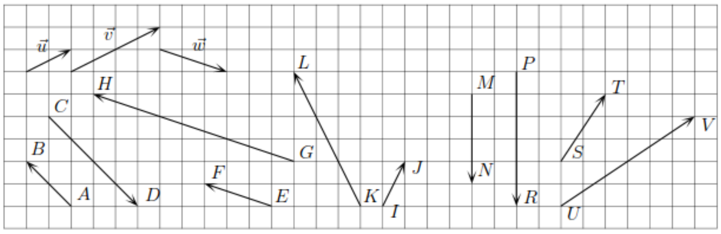
3) le nombre c tel que $c\vec{u}_1=\vec{u}_2$

4) le nombre d tel que $d\vec{u}_1=\vec{u}_2$



Vecteurs colinéaires

Ex 17 : ***Colinéaires ou non ?***



1) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils colinéaires ? Si la réponse est oui, donner le nombre k tel que $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$ ou le nombre k' tel que $\overrightarrow{CD}=k'\overrightarrow{AB}$

2) Même question pour les vecteurs :

a) $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GH}$ b) $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KL}$ c) $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PR}$ d) $\overrightarrow{ST}$ et $\overrightarrow{UV}$

Coordonnées de vecteurs

Ex 18 : ***Déterminer les coordonnées***

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ constitué avec un carreau, indiquer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{PR}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{MN}$ de l'exercice 17.

Ex 19 : ***Tracer un vecteur connaissant ses coordonnées***

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, tracer les vecteurs :

$$\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix} , \overrightarrow{KL}\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix} , \overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix} , \overrightarrow{OP}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$$

Coordonnées de vecteurs et coordonnées de points

Ex 20 : ***Lien entre les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ et les points A et B.***

1) Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ placer les points $A(13;29)$ et $B(31;56)$.

2) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

3) Quand on a les coordonnées $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$, comment calcule-t-on les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$?

Ex 21 : ***Nature d'un quadrilatère***

1) Tracer un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, placer les points $A(-3;2)$, $B(7;0)$, $C(5;-4)$, $D(-5;-2)$, puis tracer le quadrilatère $ABCD$.

2) Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{DC}$.

3) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier.

Ex 22 : ***Déterminer les coordonnées d'un point***

1) Tracer un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, et placer les points $A(6;2)$, $B(8;-4)$, $C(-4;3)$.

2) Placer le point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. Tracer ce parallélogramme.

3) Calculer les coordonnées du point D.

Ex 23 : ***Déterminer les coordonnées d'un point***

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $A(-6;2)$, $C(3;6)$ et $E(2;-3)$, et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}$, $\vec{w}\begin{pmatrix}-7\\1\end{pmatrix}$.

1) Tracer un repère, et placer les points A, C, E.

2) Placer les points B, D, F tels que $\vec{AB}=\vec{u}$, $\vec{CD}=\vec{v}$, $\vec{EF}=\vec{w}$.

3) Calculer les coordonnées des points B, D, F.

Coordonnées de la somme de vecteurs

Ex 24 : ***Déterminer des coordonnées***

1) Tracer un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ et placer les points $A(-2;-1)$, $B(-4;3)$, $C(1;-3)$, $D(6;-2)$, $E(3;-1)$

2) On pose $\vec{u}=\vec{AB}$ et $\vec{v}=\vec{CD}$. Tracer ces deux vecteurs.

3) Construire le point F tel que $\vec{EF}=\vec{u}+\vec{v}$

4) Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}+\vec{v}$.

5) Calculer les coordonnées du point F.

Coordonnées du produit d’un vecteur par un nombre

Ex 25 : ***Calculs et coordonnées***

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}$

Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants :

$2\vec{u}$, $3\vec{v}$, $-2\vec{w}$, $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{v}-\vec{w}$, $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$,
$-3\vec{u}-2\vec{v}+5\vec{w}$ et $5\vec{v}-3\vec{w}$

Ex 26 : ***Vecteurs colinéaires***

1) Tracer un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ et placer les points $A(1;2)$, $B(5;1)$, $C(6;-3)$, $D(-2;-1)$.

2) Tracer les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{DC}$ et calculer leurs coordonnées.

3) Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{DC}$ sont-ils colinéaires ? Justifier par un calcul.

4) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier.

Ex 27 : ***Points alignés***

1) Tracer un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ et placer les points $A(1;2)$, $B(4;4)$, $C(10;8)$, $D(-4;-1)$.

2) Tracer les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ et calculer leurs coordonnées.

3) Les points A, B, C sont-ils alignés ? Justifier avec des vecteurs colinéaires ou non.

4) Les points A, B, D sont-ils alignés ? Justifier avec des vecteurs colinéaires ou non.

Ex 28 : ***Position relative de deux droites***

Soit dans une repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, les points $A(2,-8)$, $B(-5,6)$, $C(-16,23)$, $D(5,-19)$, $E(-4;4)$, $F(52;12)$, $G(26;19)$, $H(13;20,5)$ et $I(0;5)$

1) Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?

2) Les points A, B et E sont-ils alignés ?

3) Montrer que les droites (FG) et (HI) sont parallèles . Sont-elles confondues ?

Sur l'ensemble du chapitre

Ex 29 : ***Manipuler des expressions de vecteurs***

Soit A, B, C, D, E, F et G six points du plan.

1) Simplifier les expressions :

$\vec{AB}+\vec{DC}+\vec{BD}=\dots$ $\vec{BE}-\vec{DC}+\vec{DB}=\dots$

$\vec{BG}-\vec{DE}+\vec{DF}-\vec{BF}=\dots$

2) En choisissant des points judicieux, compléter :

$\vec{BE}+\dots=\vec{BD}$ $\vec{BE}+\vec{\dots F}=\vec{B\dots}$

$\vec{B\dots}+\vec{\dots A}=\vec{BA}$ $\vec{BE}-\vec{G\dots}=\vec{B\dots}$

Ex 30 : ***Symétrie centrale***

Soit dans une repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ les points , $A(2;3)$, $B(3;-1)$ et $C(-1;1)$.
La symétrie centrale de centre C transforme A en A’ et B en B’.
1) Faire une figure.

2) a) Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$.

b) En déduire, en utilisant une propriété du cours, les coordonnées du vecteur $\vec{A'B'}$.

3) a) Calculer les coordonnées des points A' et B'.

b) Retrouver le résultat de la question 2) b).

Ex 31 : ***Homothétie***

Soit dans une repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ les points , $A(4;3)$, $B(6;1)$, $C(3;-1)$, $D(1;1)$ et $F(4;2)$.
Les points A', B', C' et D' sont les images respectives des points A, B, C et D par l’homothétie de centre F et de rapport $\lambda=1,5$.
1) Faire une figure.

2) Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

3) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{A'B'}$ et $\vec{D'C'}$.

4) En déduire la nature du quadrilatère $A'B'C'D'$

Ex 32 : ***Comprendre un programme***

On considère le programme écrit en Python ci-dessous.

```
def coord(xM,yM,xN,yN):
   x=xM-xN
   y=yM-yN
   return(x,y)
AB=[coord(1,-3,3,4)]
CD=[coord(-1,3,-3,5)]
if (AB==CD):
   print('les vecteurs sont égaux')
else:
   print('les vecteurs ne sont pas égaux')
```

1) De quel type sont les variables AB et CD ?

2) Qu'affiche ce programme ?

3) Modifier la ligne AB=[coord(…,…,3,4)] pour que le programme affiche 'les vecteurs sont égaux'.

Ex 33 : ***Vecteurs colinéaires***

Soit un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. Dire dans chaque cas si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires :

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\-4\end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}-1}{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}+1}\end{pmatrix}$

Ex 34 : ***Quelques équations***

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, soit les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2+x\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-4+y\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\-4-x\end{pmatrix}$ où x et y sont des réels.

1) Déterminer x et y pour que :

a) $\vec{u}=\vec{v}$

b) $3\vec{u}-5\vec{v}=\vec{0}$

2) Pour quelle valeur de x , $\vec{w}$ est-il colinéaire avec $\vec{n}\begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}$?

3) On considère les points $A(-3;3)$, $B(1;-2+x)$ et $C(5;4)$
Déterminer le réel x pour que les points A, B et C soient alignés.

Ex 35 : ***Orthocentre d'un triangle***

Soit un triangle ABC et A' , B' , C' , les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.
Soit O , le centre du cercle circonscrit à ce triangle.
Soit H , le point déterminé par $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

1) Montrer que $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OA'}$

2) En déduire que la droite (AH) est la hauteur du triangle ABC issue du point A .

3) Que peut-on dire des droites (BH) et (CH) ?

4) Donner une caractérisation vectorielle de l'orthocentre d'un triangle.

Ex 36 : ***GeoGebra - Droite d'Euler d'un triangle***
(consulter trans_vecteurs_36.html)

Soit un triangle ABC , H , son orthocentre, G son centre de gravité et O le centre du cercle circonscrit.
Le point H est caractérisé par l'égalité $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ et le point G par l'égalité $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ (montrer dans l'exercice 37).

1) Avec GeoGebra, construire un triangle ABC et placer les points H , G et O .

2) Que peut-on conjecturer ?

3) Soit M , un point quelconque du plan . Montrer que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

4) Montrer que $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$

5) En déduire que les points O , H et G sont alignés.

6) Dans quel cas, a-t-on $O=G$? Montrer qu'alors les trois points O , G et H sont confondus.

5) Conclure

Ex 37 :

1) Soit un parallélogramme ABCD de centre I.
Montrer que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AI}$

2) Montrer que le centre de gravité G d'un triangle ABC vérifie $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Ex 38 : ***Algorithme*** (consulter trans_vecteurs_python38 et trans_vecteurs_python38b)

Dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$.

1) Rappeler la condition analytique de colinéarité des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vue dans le cours.

2) Écrire un algorithme déterminant la colinéarité ou non de deux vecteurs . Les données seront les coordonnées de chacun des deux vecteurs.

3) Soit deux droites, toutes deux déterminées par deux points distincts. Compléter le programme ci-dessous pour déterminer si ces deux droites sont sécantes.
Les données seront les coordonnées de quatre points.

```
def paralleles(xu,yu,xv,yv):
   if (xu*yv-xv*yu==0):
      print("les droites ……………………… ")
   else:
      print("les droites ……………………… ")

xA,yA=float(input("xA=")),float(input("yA="))
xB,yB=float(input("xB=")),float(input("yB="))
xC,yC=float(input("xC=")),float(input("yC="))
xD,yD=float(input("xD=")),float(input("yD="))

paralleles(………, ………, ………, ………)
```