TRIGONOMÉTRIE

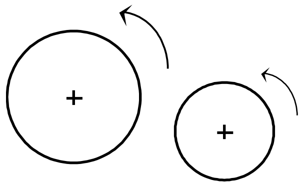
1) ORIENTATION DU PLAN

Définition :

Orienter un cercle, c'est choisir un sens de parcours sur ce cercle appelé **sens direct** (ou positif).
L'autre sens est appelé **sens indirect** (négatif ou rétrograde)

Orienter le plan*,* c'est orienter tous les cercles du plan dans le même sens.
L'usage est de choisir pour sens direct le sens contraire des aiguilles d'une montre.
(appelé aussi **sens trigonométrique**)

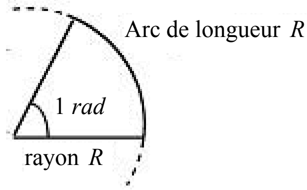
Un cercle trigonométrique est un cercle orienté dans le sens direct et de rayon 1.



2) MESURE DES ANGLES EN RADIAN

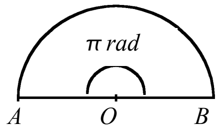
Définition :

On appelle **radian** (rad) la mesure de l'angle au centre qui intercepte, sur un cercle de rayon R , un arc de longueur R.

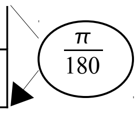


Remarques :

- Un angle au centre plat intercepte un arc de longueur πR . Il a donc pour mesure π radians.
- Les mesures d'un angle en radian et en degré sont proportionnelles. (heureusement)
  Il en découle que l 'on peut faire les conversions de mesures à l'aide d'un tableau de proportionnalité :



mesures en degré	180	360	90	45	60	30
mesures en radian	π	2π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$



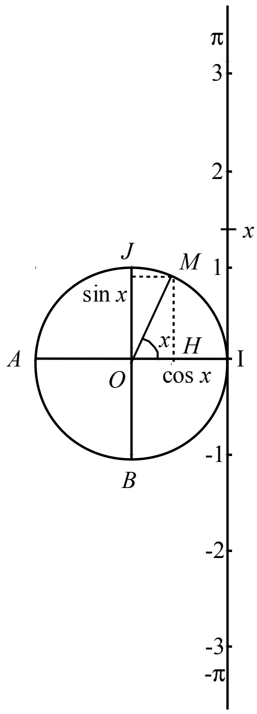
- $1\ rad \approx 57{,}3\,°$ $\qquad 1° = \frac{\pi}{180}\ rad \approx 0{,}0175\ rad$
- L'arc intercepté par un angle au centre de x radians sur un cercle de rayon R a pour longueur xR .
  Si le cercle a pour rayon 1 , alors l'arc a pour longueur x

3) L'ENROULEMENT DE LA DROITE NUMÉRIQUE

Dans le repère orthonormé (O , I , J) , on considère le cercle trigonométrique de centre O.
Sauf contre indication, l’unité utilisée est le radian.

Tout point de l'axe correspond à **un point** du cercle.
Tout point du cercle est associé à **une infinité** de points de l'axe, donc à une infinité de nombres réels.
Plus généralement, au réel x est associé le point M du cercle et au point M sont associés les réels x, $x+2\pi$, $x+4\pi$, $x-2\pi$, $x-4\pi$, etc...

Par exemple, la longueur d'un quart de cercle de rayon 1 étant $\frac{2\pi}{4}$ soit $\frac{\pi}{2}$,
le point J est associé à $\frac{\pi}{2}$, mais aussi à $\frac{\pi}{2}+2\pi$, $\frac{\pi}{2}+4\pi$, $\frac{\pi}{2}-2\pi$
(après un ou deux tours dans le sens positif, ou un tour dans le sens négatif)



Définition :

A tout réel x, on associe un point M du cercle trigonométrique par enroulement de la droite des réels.
Ce point M est unique.

- l'abscisse x_M du point M est le **cosinus** de x (noté $\cos x$)
- l'ordonnée y_M du point M est le **sinus** de x (noté $\sin x$)

Exemples :

$\cos 0=1$ et $\sin 0=0$; $\cos \pi=-1$ et $\sin \pi=0$; $\cos \frac{\pi}{2}=0$ et $\sin \frac{\pi}{2}=1$; $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$

4) LIEN AVEC LES FORMULES DANS UN TRIANGLE RECTANGLE

Lorsque M appartient à l'arc $\overset{\frown}{IJ}$ parcouru dans le sens direct (bornes exclues), ses coordonnées sont strictement positives.
Ainsi pour un angle aigu $\widehat{IOM}$ (mesure comprise entre 0° et 90° ou entre 0 rad et $\frac{\pi}{2}$ rad) les grandeurs $\cos x$ et $\sin x$ peuvent être interprétées comme des rapports de longueurs.

On retrouve les notions vues en troisième dans le triangle rectangle.

Propriété :

Dans le triangle HOM rectangle en H, on a :

$$\cos \widehat{HOM}=\frac{OH}{OM}=\frac{x_M}{1}=\cos x \quad \text{et} \quad \sin \widehat{HOM}=\frac{HM}{OM}=\frac{y_M}{1}=\sin x$$

5) VALEURS REMARQUABLES DU SINUS ET DU COSINUS

x (en degré)	0	30	45	60	90
x (en radian)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

6) PROPRIÉTÉS DU SINUS ET DU COSINUS

Propriétés :

Pour tout réel x, on a :

- $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\cos(x+2k\pi)=\cos(x)$ et $\sin(x+2k\pi)=\sin(x)$
- $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$
- $\sin^2 x+\cos^2 x=1$
- $\cos(-x)=\cos x$ et $\sin(-x)=-\sin x$

Preuve :

- $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

  On a toujours $-1 \leqslant x_M \leqslant 1$ et $-1 \leqslant y_M \leqslant 1$

- $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

  Se montre grâce au théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OHM

- $\cos(-x)=\cos x$ et $\sin(-x)=-\sin x$