L'enroulement de la droite numérique

(consulter trigonometrie_geo1.html)

Ex 1 : ***QCM***

Dans chaque question, déterminer la (ou les) bonne(s) réponses.
1) Le sens trigonométrique est :
a) le sens des aiguilles d'une montre ; b) le sens direct ;
c) le sens inverse des aiguilles d'une montre ; d) le sens indirect.

2) Le cercle trigonométrique est tel que :
a) son rayon vaut π b) son diamètre vaut 2
c) son périmètre vaut 360° d) son périmètre vaut 2 π

3) Si un segment est enroulé dans le sens trigonométrique autour du cercle trigonométrique les longueurs associées seront :
a) positives b) négatives c) de signe quelconque

4) Après enroulement sur le cercle trigonométrique, deux points x et y de la droite numérique :
a) espacés de 3 π ne sont pas situés sur le même point du cercle.
b) espacés de 360° ne sont pas situés sur le même point du cercle.
c) sont situés sur le même point du cercle que s'ils sont espacés d'un multiple de 2 π .
d) espacés de 0° sont situés sur le même point du cercle.

Ex 2 : ***Vrai ou faux***

Soit le plan muni d'un repère (O,I,J) et du cercle trigonométrique.
1) Après enroulement sur le cercle trigonométrique, tous les points de la droite numérique correspondant aux réels du type $k\times 2\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ coïncident avec le point I.

2) Après enroulement sur le cercle trigonométrique, tous les points de la droite numérique correspondant aux réels du type $\pi+k\times 2\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ coïncident avec le point I.

3) Après enroulement sur le cercle trigonométrique, aucun point de la droite numérique ne peut correspondre au point O.

4) Après enroulement sur le cercle trigonométrique dans le sens direct, tous les points de la droite numérique correspondant aux réels du type $\frac{\pi}{2}+k\times 2\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ coïncident avec le point J.

Ex 3 : ***Longueurs d'arcs de cercle***

Calculer les longueurs d'arcs de cercle dans les cas suivants :
1) Un arc de cercle de diamètre 5 cm et d'angle 45°.

2) Un arc de cercle d'angle 210° et de rayon unitaire.

3) Un arc de cercle de rayon 20 cm et d'angle 90°.

4) Un arc de cercle de rayon unitaire et d'angle 150°.

Ex 4 : ***Angle au centre***

Sur un cercle de rayon R, déterminer la mesure en degré des angles des arcs de cercle de longueur L dans chacun des cas suivants :

1) R=5 et L= π 2) R=0,5 et $L=\frac{\pi}{6}$ 3) R=10 et $L=\frac{20\pi}{3}$

Ex 5 : ***Se repérer sur le cercle trigonométrique***

Placer sur le cercle trigonométrique les points ci-dessous correspondants, après enroulement autour du cercle trigonométrique, aux abscisses suivantes de la droite numérique :

points	A	B	C	D	E	F	G	H
abscisses	0	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	-2000π	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{-5\pi}{4}$	11π

Ex 6 : ***Cadran d'horloge***

Un cadran d'horloge dispose de deux aiguilles . Celle des minutes mesure 12 cm et celle des heures 6 cm.
Calculer la distance parcourue par l'extrémité de la grande aiguille depuis midi lorsqu'il est :

1) 12h05 2) 12h25 3) 13h15 4) 16h32

Sinus et cosinus d'un nombre réel

Ex 7 : ***Vrai ou faux***

Soit le plan muni d'un repère (O,I,J) et du cercle trigonométrique.
Soit M le point du cercle trigonométrique correspondant à x après enroulement de la droite numérique.

1) L'abscisse du point M est $\sin x$.

2) L'ordonnée du point M est $\sin x$.

3) La longueur du segment [OM] est 2π .

4) L'ordonnée du point M est comprise entre -1 et 1.

5) L'abscisse du point M est positive.

Ex 8 : ***Vrai ou faux***

Soit x un réel quelconque.

1) $\cos x+\sin x=1$ 5) $0\leqslant\cos x\leqslant 1$

2) $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$ 6) $\cos x\leqslant\sin x$

3) $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ 7) $\sin(x+2k\pi)=\sin x$, $k\in\mathbb{R}$

4) $\cos(-x)=\sin x$ 8) $\sin(-x)=-\sin(x)$

Ex 9 : ***Calculs***

Calculer les sinus et les cosinus des réels suivants :

1) $\frac{5\pi}{6}$ 2) $-\frac{11\pi}{2}$ 3) $-\frac{7\pi}{3}$ 4) $\frac{9\pi}{4}$ 5) $-\frac{\pi}{6}$ 6) $\frac{1947\pi}{2}$

Ex 10 : ***Calculs***

Calculer la valeur du produit $\cos x\times\sin y$ dans les cas suivants :

1) $x=0$ et $y=\pi$ 2) $x=\frac{\pi}{3}$ et $y=\frac{\pi}{3}$ 3) $x=0$ et $y=-\frac{\pi}{4}$

4) $x=\pi$ et $y=-\frac{\pi}{2}$ 5) $x=527$ et $y=240\pi$ 6) $x=\frac{17\pi}{2}$ et $y=17$

Ex 11 : ***Déterminer un réel correspondant à une valeur remarquable de sinus ou de cosinus***

Déterminer les solutions réelles des équations suivantes :

1) $\sin x=0$ 2) $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ 3) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 4) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

5) $2\cos x=1$ 6) $\cos x+\sin x=7$ 7) $\cos x+3=2$ 8) $4\sin x=-2$

Ex 12 : ***Déterminer un réel connaissant son sinus ou son cosinus***

Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près d'un réel x vérifiant :

1) $\cos x=\frac{1}{4}$ 2) $\sin x=\frac{\sqrt{5}}{2}$ 3) $3\sin x=1$

4) $\cos^2 x=1-\sqrt{2}$ 5) $\sin(x-\pi)=\frac{\pi}{3}$ 6) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Ex 13 : ***Système d'équations***

Déterminer les solutions réelles des systèmes d'équations suivants :

1) $\begin{cases}\cos x=0\\ \sin x=1\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin x=\frac{1}{2}\\ \cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

Ex 14 : ***Trigonométrie et géométrie***

Soit le plan muni d'un repère (O,I,J) et du cercle trigonométrique.
Soit M,N,P et Q les points dons les coordonnées sont données ci-dessous. α et β sont deux réels . Pour chaque point, déterminer s'ils sont situés à l'intérieur du cercle trigonométrique, sur le cercle , ou à l'extérieur du cercle.

$M(\sin\alpha;\cos\alpha)$ $N(-0{,}5\cos\alpha;0{,}5\sin\alpha)$

$P(\cos\alpha-\sin\alpha;\sin\alpha+\cos\alpha)$

$Q(\cos\alpha\times\cos\beta-\sin\alpha\times\sin\beta;\sin\alpha\times\cos\beta+\cos\alpha\times\sin\beta)$

Ex 15 : ***Équation produit***

Soit $x\in\mathbb{R}$.
1) En remarquant que $(\cos x-\sin x)^2\geqslant 0$, en déduire que :
$\cos x\times\sin x\leqslant\frac{1}{2}$

2) De la même façon, en développant $(\cos x+\sin x)^2$, montrer que :
$-\cos x\times\sin x\leqslant\frac{1}{2}$

3) En déduire que pour tout réel x , on a :
$-\frac{1}{2}\leqslant\cos x\times\sin x\leqslant\frac{1}{2}$

L'équation $\cos x\times\sin x=1$ a-t-elle une solution ?

Ex 16 : ***Inéquation***

Dans chacun des cas suivants, dessiner en rouge sur un cercle trigonométrique, l'ensemble de tous les points associés à α , puis utiliser la représentation pour résoudre l'inéquation proposée dans l'intervalle donné.

1) cos(α)< $\frac{1}{2}$ et $\alpha\in\,]-\pi;\pi]$

2) cos(α)< $\frac{1}{2}$ et $\alpha\in[0;2\pi[$

3) sin(α)< $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\alpha\in\,]-\pi;\pi]$

4) sin(α)< $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\alpha\in[0;2\pi[$

Ex 17 : ***Représentation graphique***

Soit f et g les fonctions définies sur $[0,2\pi]$ par $f(x)=\cos x$ et $g(x)=\sin x$.

1) dresser un tableau de valeurs des fonctions f et g sur l'intervalle $[0,2\pi]$ avec un pas de 0,2
(on donnera des valeurs approchées à 10^{-1} près)

2) Tracer dans un même repère avec la calculatrice puis à la main, les représentations graphiques des fonctions f et g .

Ex 18 : ***Maximiser l'aire d'un trapèze – GeoGebra***
(consulter trigonometrie_geo18.html)

Soit le plan muni d'un repère (O,I,J) et du cercle trigonométrique.
Soit M un point du cercle trigonométrique appartenant à l'arc IJ (extrémités exclues), et N son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Soit K le symétrique de I par rapport à l'axe des ordonnées.

1) Réaliser la figure à l'aide de GeoGebra.

2) Montrer que l'aire du trapèze MNKI vaut $\sin\alpha(1+\cos\alpha)$, où α désigne la valeur de l'angle $\widehat{IOM}$.

3) Où placer le point M sur l'arc IJ afin que l'aire du trapèze MNKI soit maximale ? (on ne demande pas de le justifier, mais juste d'indiquer la démarche utiliser avec GeoGebra)

Toujours avec GeoGebra, relever l'aire maximale, ainsi que l'angle $\widehat{IOM}$ où cette valeur est atteinte.

Ex 19 : ***Algorithme – utilisation des listes***
(consulter trigonometrie_algo19_1.htm)

1) Écrire un algorithme qui affiche la valeur de sin0° , sin1°, sin2° jusqu'à sin90°.

2) Compléter le programme ci-dessous écrit en Python afin qu'il puisse donner une valeur approchée en degré de l'équation $\sin x=a$ dans laquelle a est saisi par l'utilisateur et appartient à l'intervalle $]0;1[$.

```
from math import sin,pi                    (Faire tourner le programme)

sinus=[] #création de la liste contenant les valeurs sin(0),sin(1) …

a=float(input("saisir une valeur strictement comprise entre 0 et 1"))

for i in range(0,        ):

    sinus.append(                    ) #après la création de la liste la méthode append
                                ("ajouter"  en  anglais) permet d'ajouter des termes dans la liste
for i in range(0,        ):

  if ((
                  ):
  print(i,"est une valeur approchée par défaut de la solution de
  l'équation sin(x)=",a )
```