TRIGONOMÉTRIE

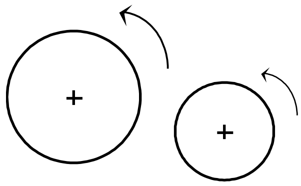
1) ORIENTATION DU PLAN

Définition :

Orienter un cercle, c'est choisir un sens de parcours sur ce cercle appelé **sens direct** (ou positif).
L'autre sens est appelé **sens indirect** (négatif ou rétrograde)

Orienter le plan, c'est orienter tous les cercles du plan dans le même sens.
L'usage est de choisir pour sens direct le sens contraire des aiguilles d'une montre.
(appelé aussi **sens trigonométrique**)

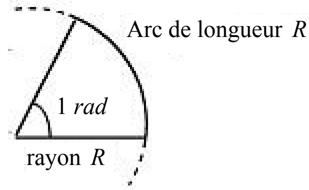
Un cercle trigonométrique est un cercle orienté dans le sens direct et de rayon 1.



2) MESURE DES ANGLES EN RADIAN

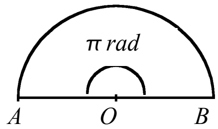
Définition :

On appelle **radian** (rad) la mesure de l'angle au centre qui intercepte, sur un cercle de rayon R , un arc de longueur R.



Remarques :

- Un angle au centre plat intercepte un arc de longueur πR . Il a donc pour mesure π radians.
- Les mesures d'un angle en radian et en degré sont proportionnelles. (heureusement)
  Il en découle que l 'on peut faire les conversions de mesures à l'aide d'un tableau de proportionnalité :



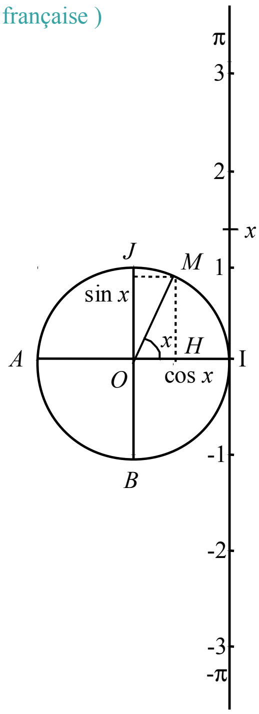
mesures en degré	180	360	90	45	60	30
mesures en radian	π	2π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$

$\frac{\pi}{180}$

- $1\ rad \approx 57{,}3\ °$ $\qquad 1° = \frac{\pi}{180}\ rad \approx 0{,}0175\ rad$
- L'arc intercepté par un angle au centre de x radians sur un cercle de rayon R a pour longueur xR .
  Si le cercle a pour rayon 1 , alors l'arc a pour longueur x

Le radian : mesure naturelle des angles permettant d'associer angle et longueur …début 20 ème siècle
Le degré est lié au partage du cercle en 6 partie de 60° ; il est utilisé depuis l'antiquité.
Le grade n'a d'intérêt que pour les géomètres … (il est lié au système métrique , inventé pendant la révolution française)

3) L'ENROULEMENT DE LA DROITE NUMÉRIQUE



Dans le repère orthonormé (O , I , J) , on considère le cercle trigonométrique de centre O.
Sauf contre indication, l'unité utilisée est le radian.

Tout point de l'axe correspond à **un point** du cercle.
Tout point du cercle est associé à **une infinité** de points de l'axe, donc à une infinité de nombres réels.
Plus généralement, au réel x est associé le point M du cercle et au point M sont associés les réels x, $x+2\pi$, $x+4\pi$, $x-2\pi$, $x-4\pi$, etc...

Par exemple, la longueur d'un quart de cercle de rayon 1 étant $\frac{2\pi}{4}$ soit $\frac{\pi}{2}$,
le point J est associé à $\frac{\pi}{2}$, mais aussi à $\frac{\pi}{2}+2\pi$, $\frac{\pi}{2}+4\pi$, $\frac{\pi}{2}-2\pi$
(après un ou deux tours dans le sens positif, ou un tour dans le sens négatif)

Définition :

A tout réel x, on associe un point M du cercle trigonométrique par enroulement de la droite des réels.
Ce point M est unique.

- l'abscisse x_M du point M est le **cosinus** de x (noté $\cos x$)
- l'ordonnée y_M du point M est le **sinus** de x (noté $\sin x$)

Exemples :

$\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$; $\cos \pi = -1$ et $\sin \pi = 0$; $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ et $\sin \frac{\pi}{2} = 1$; $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

4) LIEN AVEC LES FORMULES DANS UN TRIANGLE RECTANGLE

Lorsque M appartient à l'arc $\overset{\frown}{IJ}$ parcouru dans le sens direct (bornes exclues), ses coordonnées sont strictement positives.
Ainsi pour un angle aigu $\widehat{IOM}$ (mesure comprise entre 0° et 90° ou entre 0 rad et $\frac{\pi}{2}$ rad) les grandeurs $\cos x$ et $\sin x$ peuvent être interprétées comme des rapports de longueurs.

On retrouve les notions vues en troisième dans le triangle rectangle.

Propriété :

Dans le triangle HOM rectangle en H, on a :

$\cos \widehat{HOM} = \frac{OH}{OM} = \frac{x_M}{1} = \cos x$ et $\sin \widehat{HOM} = \frac{HM}{OM} = \frac{y_M}{1} = \sin x$

5) VALEURS REMARQUABLES DU SINUS ET DU COSINUS

x (en degré)	0	30	45	60	90
x (en radian)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

6) PROPRIÉTÉS DU SINUS ET DU COSINUS

Propriétés :

Pour tout réel x, on a :

- $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$
- $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$

Preuve :

- $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

  On a toujours $-1 \leqslant x_M \leqslant 1$ et $-1 \leqslant y_M \leqslant 1$

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

  Se montre grâce au théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OHM

- $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$