FONCTION CARRÉE – POLYNOMES DU SECOND DEGRÉ

1) LA FONCTION CARRÉE

A) DÉFINITION et VARIATIONS

Définition :

La fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout nombre réel x associe son carré x^2, est appelée **fonction carrée.**

Remarque:
La fonction carrée n'est pas linéaire.

Propriété :

La fonction carrée $f : x \longmapsto x^2$ est **strictement décroissante** sur $]-\infty ; 0]$.

La fonction carrée $f : x \longmapsto x^2$ est **strictement croissante** sur $[0 ; +\infty[$.

Preuve :

Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. On a alors :

$$f(a) - f(b) = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

1er cas: $a < b \leqslant 0$

$a - b < 0$ puisque $a < b$,
$a + b < 0$ puisque a et b sont négatifs ou nuls.

D'après la règle des signes d'un produit, on en déduit que :

$$(a-b)(a+b) > 0$$
$$\Leftrightarrow \quad f(a) - f(b) > 0$$
$$\Leftrightarrow \quad f(a) > f(b)$$

Les images de a et de b par la fonction carrée sont donc dans l'ordre contraire de a et de b, ce qui démontre que la fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$.

2ème cas: $0 \leqslant a < b$

$a - b < 0$ puisque $a < b$,
$a + b > 0$ puisque a et b sont positifs ou nuls.

D'après la règle des signes d'un produit, on en déduit que:

$$(a-b)(a+b) < 0$$
$$\Leftrightarrow \quad f(a) - f(b) < 0$$
$$\Leftrightarrow \quad f(a) < f(b)$$

Les images de a et de b par la fonction carrée sont donc dans le même ordre que a et b, ce qui démontre que la fonction carrée est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Remarques :

- Deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés
- Deux nombres négatifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs carrés

Le **tableau de variations** de la fonction carrée est donc:

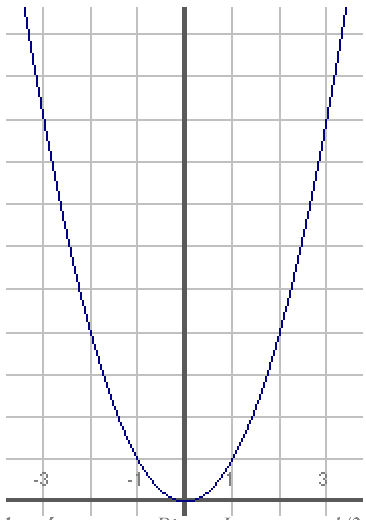
x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

La fonction carrée admet un minimum en 0, de valeur 0.

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0 \text{ et } 0^2 = 0$$

B) REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

x	-4	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3	4
$f(x) = x^2$	16	9	4	1	0,25	0	0,25	1	4	9	16



Définition :

Dans un repère orthogonal (O, I, J), la courbe représentative de la fonction carrée est appelée **parabole** d'équation $y = x^2$. (Elle est souvent notée $\mathcal{P}$)
Le point $O(0 ; 0)$ est appelé **sommet de la parabole**.

Propriété :

Dans un repère orthogonal, la parabole $\mathcal{P}$ représentant la fonction carrée est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Preuve :

Soit un point $M(x\,;y)$ appartenant à la parabole $\mathcal{P}$. On a alors $y=x^2$.

Le symétrique de M par rapport à l'axe des ordonnées (Oy) est la point $M'(-x\,;y)$.
Or $(-x)^2=x^2=y$, donc M' appartient aussi à la parabole $\mathcal{P}$.
Ainsi, pour tout point M de $\mathcal{P}$, son symétrique par rapport à (Oy) appartient aussi à $\mathcal{P}$. On en déduit que $\mathcal{P}$ est symétrique par rapport à (Oy).

2) FONCTIONS POLYNOMES DU SECOND DEGRÉ

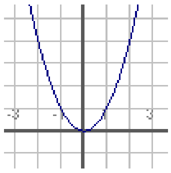
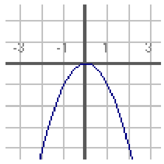
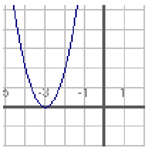
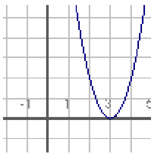
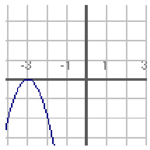
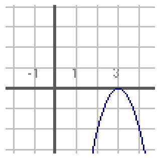
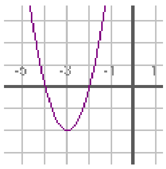
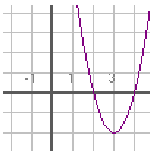
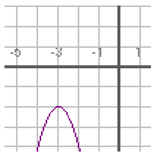
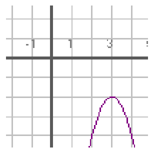
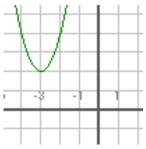
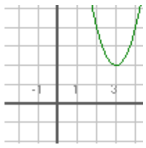
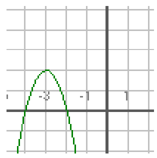
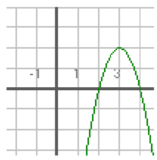
A) LES FONCTIONS $x \longmapsto a(x-\alpha)^2+\beta$ (avec $a\neq 0$)

Définition :

Soit a , α et β trois nombres réels avec a non nul.
Dans un repère orthogonal $(O\,,I\,,J)$, la courbe représentative de la fonction $x\longmapsto a(x-\alpha)^2+\beta$ est appelée **parabole** d'équation $y=a(x-\alpha)^2+\beta$. (Elle est souvent notée $\mathcal{P}$)

La fonction carrée est un cas particulier de cette famille de fonction.

Le tableau ci-dessous présente un inventaire des différentes situations en fonction des paramètres a, α et β.

	$a>0$		$a<0$	
ax^2				
	$\alpha<0$	$\alpha>0$	$\alpha<0$	$\alpha>0$
$a(x-\alpha)^2$				
$a(x-\alpha)^2+\beta$ $\beta<0$				
$a(x-\alpha)^2+\beta$ $\beta>0$				
	Les branches de la parabole sont dirigées vers le haut.		Les branches de la parabole sont dirigées vers le bas.	

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		↘	β	↗	

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f		↗	β	↘	

Remarque :
Le point le plus « bas » ou le plus « haut » de la parabole s'appelle **le sommet** de la parabole.

Les tableaux précédents permettent de conjecturer les propriétés suivantes.

Propriété :

- Si $a > 0$, f est strictement décroissante, puis strictement croissante.
- Si $a < 0$, f est strictement croissante, puis strictement décroissante.

Propriété :

$\mathcal{P}$ est symétrique par rapport à une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Il s'agit en fait, comme nous le verrons plus tard, de la droite d'équation $x = \alpha$.

B) LES FONCTIONS $x \longmapsto a\,x^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$)

Définition :

Soit a , b et c trois nombres réels avec a non nul.
On appelle fonction **polynôme du second degré**, toute fonction qui à tout réel x, associe le réel $ax^2 + bx + c$.

On dit aussi polynôme de degré 2 ou trinôme du second degré.

Exemples :

- La fonction carrée et la fonction $f : x \longmapsto 2\,x^2 - 3x + 5$ sont des polynômes du second degré.
- Les fonctions linéaires et affines ne sont pas des polynômes du second degré.

Remarque :
Toute fonction polynôme du second degré $f : x \longmapsto a\,x^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme $x \longmapsto a\,(x - \alpha)^2 + \beta$.
Cette dernière écriture est appelée **forme canonique.**

Tous les résultats du paragraphe précédent peuvent donc s'appliquer.

3) ÉQUATION PRODUIT – INÉQUATION PRODUIT

Propriété :

Soit a , b , c et d quatre nombres réels avec a et b non nuls.
L'équation produit $(ax + b)(cx + d) = 0$ admet deux solutions réelles : $-\dfrac{b}{a}$ et $-\dfrac{d}{c}$

$A\,B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$

Exemple :

$(-3\,x + 1)(2\,x - 5) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{1}{3}$ ou $x = \dfrac{5}{2}$

Remarque :
Les deux solutions peuvent éventuellement être confondues.

Propriété :

- Le produit de deux réels de même signe est positif.
- Le produit de deux réels de signes contraires est négatif.

Soit a , b , c et d quatre nombres réels avec a et b non nuls.
Pour résoudre l'inéquation $(ax + b)(cx + d) < 0$, on étudie séparément les signes de $ax + b$ et de $cx + d$, puis à l'aide d'un tableau de signes on détermine le signe du produit $(ax + b)(cx + d)$.

La méthode est identique pour $(ax + b)(cx + d) \leq 0$, $(ax + b)(cx + d) \geq 0$ et $(ax + b)(cx + d) > 0$

Exemple :

Résolution de $(-3\,x + 1)(2\,x - 5) > 0$
A l'aide d'un tableau de signes, on étudie successivement les signes de $-3\,x + 1$ et $2\,x - 5$.
On en déduit le signe de $(-3\,x + 1)(2\,x - 5)$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$-3\,x + 1$		$+$	0	$-$		$-$	
$2\,x - 5$		$-$		$-$	0	$+$	
$(-3\,x + 1)(2\,x - 5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc S = $\left]\dfrac{1}{3} ; \dfrac{5}{2}\right[$