La fonction carré

Ex 1 : ***Vrai ou faux***

1) La fonction carré n'est définie que sur $]-\infty;0]$.
2) La fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}$.
3) La fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}^+$.
4) L'image par la fonction carré de 1 est -1.
5) La fonction carré est positive sur $\mathbb{R}^+$.
6) La courbe représentative de la fonction carré est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Ex 2 : ***Quelques calculs***

1) Calculer l'image par la fonction carré de chacun des nombres suivants !

a) $1+\sqrt{2}$ b) 1,1 c) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ d) $1-\sqrt{5}$ e) $(-\sqrt{5})^2$

2) Parmi les nombres suivants, lesquels sont des antécédents de 5 par la fonction carré ?

a) $\sqrt{5}$ b) $-\sqrt{5}$ c) $\sqrt{25}$ d) $\sqrt{5}^2$ e) $\sqrt{(-5)^2}$ f) $(-\sqrt{5})^2$

3) Compléter les pointillés par le symbole $\leqslant$ ou $\geqslant$.

a) $3^2 \ldots 4^2$ b) $0,1^2 \ldots 0,2^2$ c) $(-2)^2 \ldots (-3)^2$

4) Dire si les points suivants appartiennent à la courbe représentative de la fonction carré :

A(-1;1) B(0;0) C(1;1) D($\sqrt{3}$;3) E(- $\sqrt{3}$;3) F(3 ; $\sqrt{3}$)

Ex 3 : ***Utiliser les variations de la fonction carré***

1) Comparer les carrés des deux réels proposés :
a) 1 et 1,1 b) 0,9 et 1 c) -4 et -3 d) -0,9 et 0,7 e) -4 et 0,5

2) Soit a et b deux réels tels que $3<a<b$.

Comparer $(a-3)^2-6$ et $(b-3)^2-6$

3) Déterminer un encadrement de x^2 en exploitant l'information proposée :

a) $4<x<6$ b) $-3<x<-2$ c) $-1<x<-0,5$ d) $0,1<x<0,2$

4) Quel renseignement sur x^2 peut-on déduire de l'information suivante ?

a) $x\leqslant-2$ b) $x>3$ c) $-4<x<2$ d) $0,1<x<0,2$

5) Soit x, y et z trois réels vérifiant $x<y<z<0$.

Classer x^2, y^2 et z^2.

Ex 4 : ***Fonction carré sur un intervalle***

Déterminer un intervalle I vérifiant les deux conditions :
1) I est de longueur 4 et la fonction carré est décroissante sur I .

2) I est de longueur 9 et la fonction carré est croissante sur I .

3) I est de longueur 5 et la fonction carré est décroissante puis croissante sur I .

4) I est de longueur 4 et la fonction carré admet pour maximum 9 sur I .

Ex 5 : ***extremum et fonction carré***

Déterminer le minimum et le maximum de la fonction carré sur l'intervalle I

a) I=[1;15] b) I=[-3;10] c) I=[-50;50]

Ex 6 : ***Trouver l'erreur dans le raisonnement suivant***

« Pour tout nombre réel x, $x+1\geqslant x$. D'où $(x+1)^2\geqslant x^2$
Soit en développant $x^2+2x+1\geqslant x^2$
On en déduit que : $2x+1\geqslant 0 \Leftrightarrow x\geqslant -\frac{1}{2}$
Donc finalement, tout nombre réel est plus grand que $-\frac{1}{2}$. »

Polynômes du second degré

Ex 7 : ***Tracé sur calculatrice***

1) Représenter chacune de ces fonctions sur la calculatrice.
$c(x)=x^2$ $f(x)=(x-1)(2-x)$ $g(x)=-x^2+x+2$
$h(x)=(2(x-3))^2+5$

2) Donner une équation de l'axe de symétrie.

Ex 8 : ***Vrai ou faux***

1) La fonction $g \longmapsto 2x^2+3x-6x+8540$ est un polynôme du second degré.
2) La fonction $x \longmapsto 2x^2-6x^4+7$ est un polynôme du second degré.
3) La fonction $x \longmapsto 2x^2-6\sqrt{x}+8$ est un polynôme du second degré.
4) Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et croissante sur $[6;+\infty[$ peut être un polynôme du second degré.
5) Un polynôme du second degré est forcément décroissant sur $]-\infty;0]$
6) Un polynôme du second degré admet toujours 0 pour minimum.
7) Un polynôme du second degré peut avoir pour axe de symétrie la droite d'équation $y=4$.
8) Un polynôme du second degré peut avoir pour axe de symétrie la droite d'équation $x=4$.

Ex 9 : ***Polynôme du second degré ou non ?***

Parmi les fonctions ci-dessous, indiquer les polynômes du second degré.

$f(x)=-(2x+1)^2+(2x+1)+5$; $g(x)=(x^2+1)^2-(x^2-1)^2$
$h(x)=4x(x+1)^2-x(2x-1)^2$

Ex 10 : ***Forme développée***

Soit $f(x)=-2x^2+x+3$
1) Déterminer par le calcul les antécédents de 3 .

2) En exploitant la symétrie de la courbe, trouver l'axe de symétrie.

3) Tracer le tableau de variations de f.

4) Faire un schéma de la parabole où apparaissent les éléments mentionnés plus haut

5) Appliquer la même technique aux trinômes
a) $g(x)=x^2-x+1$ b) $h(x)=-2x^2-3x+4$

Ex 11 : ***Forme canonique***

Soit $f(x)=(2(x+1))^2-1$
1) Quel est le minimum de f et pour quelle valeur de x ce minimum est-il atteint ?

2) Écrire $f(x)$ comme un trinôme du second degré.

3) Tracer le tableau de variations de f.

4) Appliquer la même technique aux trinôme écrit sous forme canonique $g(x)=2+(x-1)^2$

5) Que peut-on dire de $h(3)$ pour $h(x)=2-(x-3)^2$?
Tracer le tableau de variation, puis un schéma de la courbe.

Ex 12 : ***Forme factorisée***

Soit $f(x)=(x+2)(1-3x)$
1) Résoudre l'équation $f(x)=0$

2) Écrire $f(x)$ comme un trinôme du second degré

3) En utilisant la première réponse trouver une équation de l'axe de symétrie de la parabole

4) Tracer le tableau de variations de f .

5) Faire un schéma de la parabole où apparaissent les éléments mentionnés plus haut.

6) Appliquer la même technique aux trinômes
a) $g(x)=(2x-1)(x+2)$ b) $h(x)=(2-x)(2x-3)$

Ex 13 : ***Trinômes factorisables***

1) Factoriser $A=x^2-9$, $B=-3x^2+2x$, $C=x^2+2x+1$

2) Trouver un réel a tel que $D=x^2+6x+5$ se factorise en $(x+1)(x+a)$

3) Trouver la forme factorisée de $E=2x^2-x-1$, de $F=x^2-3x+2$, de $G=2x^2-3x-2$

4) Si un trinôme du second degré $T(x)$ est factorisable en un produit de deux fonctions affines, combien l'équation $T(x)=0$ a-t-elle de solution(s) ?

5) Peut-on espérer factoriser $3x^2+2$?

6) Avec la calculatrice, représenter $x \longmapsto x^2-x+1$.
Peut-on factoriser ce trinôme ?

Ex 14 : ***Coefficients nuls***

Que peut-on dire de la courbe représentative de $f(x)=ax^2+bx+c$ si :

1) $a=0$? 2) $a=0$ et $b=0$? 3) $a=0$ et $c=0$?

Ex 15 : ***Minimum et tableau de valeurs***

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x)=ax^2+bx+c$ où a , b et c sont trois réels.
Le tableau de valeurs de la fonction est :

x	-2	-1	0	1	2	5
$f(x)$	8	2	-2	-4	-4	8

1) L'affirmation « le minimum de la fonction f est égal à -4 » est-elle vraie ?

2) Quelle est l'image de 3 ? 3) Résoudre l'équation $f(x)=2$?

Ex 16 : ***Minimum et tableau de valeurs***

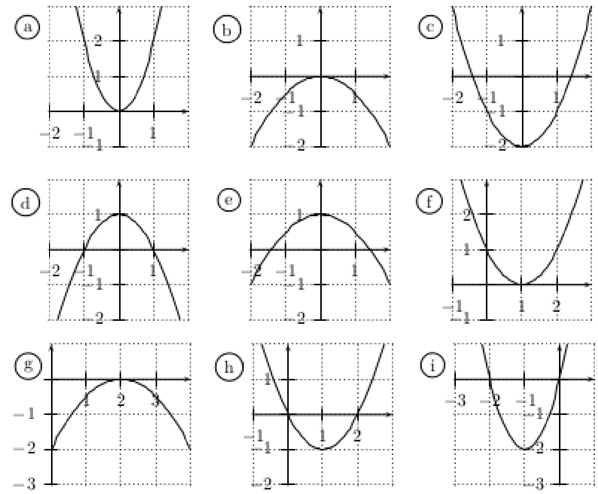
Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x)=ax^2+bx+c$ où a , b et c sont trois réels.
Le tableau de valeurs de la fonction est :

x	-2	-1	0	1	2	4
$f(x)$	8	0	-6	-10	-12	-10

1) Pour quelle valeur du réel x le minimum de f est-il atteint ?
2) Résoudre l'équation $f(x)=0$?
3) Déterminer le minimum de la fonction f .

Ex 17 : ***De la parabole à la formule***

Trouver la formule à partir de la parabole :



Ex 18 : ***Partager un nombre en 2 parties de produit maximal***

On partage une quantité fixe q en 2 parties x et y, on note p le produit de x et de y .

1) Prendre $q=10$ et choisir quelques exemples (compléter le tableau)

x	1,5	7		
y				
p				

2) Exprimer p en fonction de q et x .

3) Étudier les variations de p en fonction de x .

4) Application : Quel est, de tous les rectangles de périmètre 2m, celui qui a la plus grande aire ?

Ex 19 : ***Recette maximale***

Une boulangerie vend quotidiennement une baguette . La quantité vendue q est fonction du prix p de vente de la baguette en euros : $q=100(9-7p)$

1) Compléter le tableau .

p	0,5	0,7	0,9	1,1	1,5
q					
recette					

2) De quelle nature est la fonction qui à p associe q ?

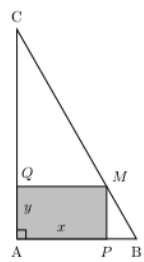
3) Exprimer la recette journalière r en fonction de p . De quelle nature est cette fonction ?

4) Quel prix conduit à la recette journalière maximale ?

Ex 20 : ***Aire minimale***

ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 4cm et AC = 7cm. M un point variable sur le côté [BC].

P est le point d'intersection de (AB) et de la parallèle à (AC) passant par M , Q est le point d'intersection de (AC) et de la parallèle à (AB) passant par M .
On note x la distance AP et y la distance AQ



1) Quelle est la nature du quadrilatère APMQ ?
2) Dans quel intervalle I varie x ?

3) Démontrer que pour tout x de l'intervalle I on a : $y=7-\frac{7}{4}x$

4) Pour quelle valeur de x APMQ est-il un carré ?

5) a) Exprimer le périmètre de APMQ en fonction de x .

b) Trouver x pour que ce périmètre soit égal à 10cm .

6) a) Exprimer l'aire du rectangle APMQ en fonction de x

b) Pour quelle valeur de x cette aire est-elle maximale ?

Équations produits

Ex 21 : ***Vrai ou faux***

1) Un produit A B est nul si et seulement si A et nul et B est nul.

2) L'équation $(x+2)(x+2)=0$ possède deux solutions distinctes.

3) L'équation $(x-6)(x+10)=0$ possède pour solutions -10 et 6.

4) Une équation produit $(ax+b)(cx+d)=0$ (avec a et c deux réels non nuls) admet toujours une ou deux solutions.

Ex 22 : ***Résolutions d'équations***

Résoudre les équations suivantes.

1) $(5x+1)(x-12)=0$ 2) $(2-7x)(11x-2)=0$

3) $(7-6x)(\sqrt{2}x-\sqrt{8})=0$ 4) $x^2=20$

5) $x^2=-7$ 6) $x^2=0$

Pour les équations 7), 8) et 9) commencer par transformer les équations en équations produits.

7) $x(x+6)=3(x+6)$ 8) $x^2(1-3x)+4(6x-2)=0$
9) $7-x^2=2x-2\sqrt{7}$

Inéquations produits

Ex 23 : ***Vrai ou faux***

1) Un produit $A\times B$ est positif si et seulement si A est positif et B est positif.

2) Le produit $(x-2)(x+6)$ est positif lorsque $x\leqslant-100$.

3) Le produit (x+3)(x+3) est positif quelque soit le réel x .

4) L'inéquation $x^2\leqslant 0$ possède un seul nombre pour solution.

5) L'inéquation $x^2<0$ ne possède aucune solution.

Tous les réels de l'intervalle [0;1] sont solutions de l'inéquation :

6) $x^2\geqslant 0$ g) $x^2<1$ h) $x^2\leqslant 4$ i) $x^2>0$

Ex 24 : ***Première ligne du tableau de signes***

Parmi les nombres suivants, lesquels interviennent dans la première ligne du tableau de signes du produit $(3x+1)(5x-7)$

-3 ; $\frac{1}{3}$; 3 ; $-\frac{1}{3}$; 5 ; 7 ; $\frac{5}{7}$; $\frac{7}{5}$; $-\frac{5}{7}$; $-\frac{7}{5}$

Ex 25 : ***Résolution d'inéquations***

Résoudre les inéquations suivantes :

1) $(x-2)(4-x)<0$ 2) $\left(\frac{3}{4}-x\right)\left(x-\frac{7}{6}\right)\geqslant 0$ 3) $(x+\sqrt{3})(x-3)\geqslant 0$

4) $x^2\leqslant 8$ 5) $x^2\leqslant 0$

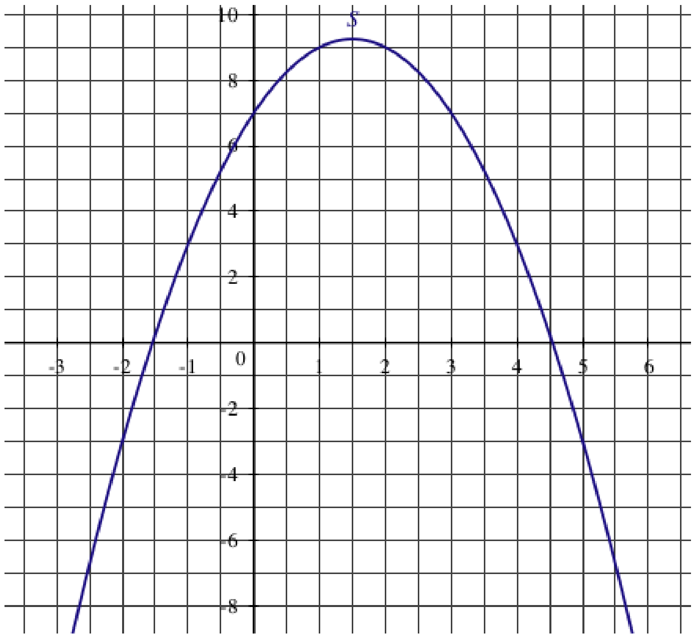
Pour les équations 6), 7) et 8) commencer par transformer les inéquations en inéquations produits.

6) $x^2-4+(x+2)(2x+5)<0$ 7) $x^2-5<(x+\sqrt{5})(x-2)$

8) $(2x-1)(x+3)\geqslant\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+6)$

Ex 26 :

La parabole C_f est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^2+3x+7$.



1) Dessiner l'axe de symétrie de la parabole C_f .

2) Calculer les coordonnées du point S sommet de la parabole C_f .

3) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=-3$.

4) Soit g la fonction affine définie par $g(x)=2x-5$.

a) Tracer la droite d représentative de la fonction g .

b) Par lecture graphique, en déduire les solutions de l'équation $-x^2+x+12=0$

5) Donner l'équation d'une droite Δ qui permette de résoudre graphiquement l'équation $-x^2+4x+5=0$

6) a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=0$.

b) Calculer les coordonnées des points d'intersection de la parabole C_f avec l'axe des abscisses.

c) Que peut-on conclure ?

7) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x)\leqslant 0$.

La méthode de dichotomie

Quand on ne sait pas résoudre une équation par les méthodes usuelles, on peut tout de même trouver une valeur approchée d'une solution éventuelle en utilisant l'algorithme de dichotomie.

On considère deux nombres réels a et b et une fonction réelle f strictement monotone sur l'intervalle $[a,b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes opposés et telle que l'on puisse tracer la courbe C_f sans lever le crayon sur l'intervalle $[a;b]$.

Supposons que nous voulions résoudre l'équation $f(x)=0$.

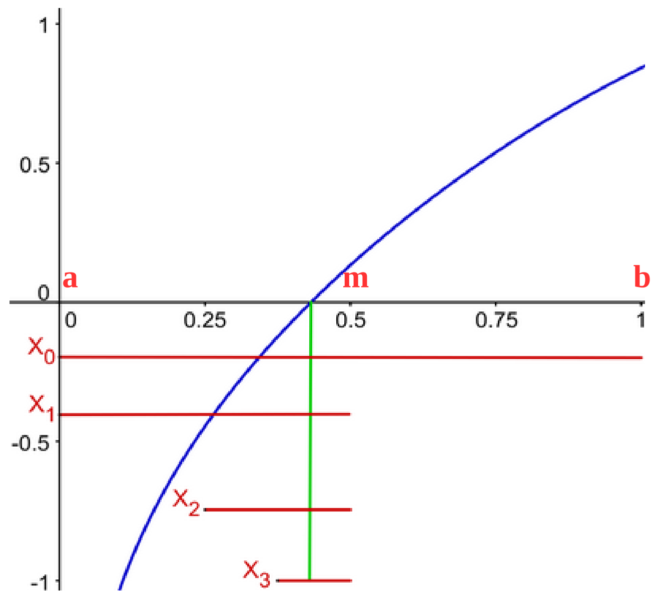
D'après un théorème qui sera vu en terminal (théorème des bijections), l'équation $f(x)=0$ a une unique solution dans l'intervalle $[a;b]$.

La méthode de dichotomie consiste à diviser l'intervalle en deux en calculant $m=\dfrac{a+b}{2}$.

Il y a maintenant deux possibilités :

- ou $f(a)$ et $f(m)$ sont de signes contraires

- ou $f(m)$ et $f(b)$ sont de signes contraires.



Ex 27 :

1) On cherche à résoudre en utilisant l'algorithme de dichotomie l'équation
$2x^2+3x-6=0$

2)
a) Compléter le programme écrit en python ci-dessous pour avoir un meilleur encadrement de la solution comprise entre 0 et 2 :

```
def f(a,b,c,x):                         (Faire tourner le programme)
   return(a*x**2+b*x+c)

def dichotomie(a,b,c,A,B,n):
   for i in range(n):

      m= ...

      if f(a,b,c,m)*    ...          <=0:

         B= ...

      else:

         A= ...

   return A,B

print (dichotomie( ..                 ))
```

b) Quelle est l'amplitude de l'encadrement ? Justifier la réponse.

3) Que faire pour avoir un encadrement de même amplitude de l'autre solution ?

4) Modifier le programme ci-dessous afin d'obtenir un encadrement de la solution d'amplitude inférieur à une réel p, donné à l'avance.

```
def f(a,b,c,x):                         (Faire tourner le programme)
   return(a*x**2+b*x+c)


def dichotomie(a,b,c,A,B,p):

   while (   ...                 ):

      m= ...

      if f(a,b,c,m)* ...                <=0:

         B= ...

      else:

         A= ...

   return A,B

p=float(input("p="))

print (dichotomie( ...                  ))
```

5) Comment utiliser ce programme pour avoir un encadrement de $\sqrt{2}$ avec une amplitude inférieure à p.